



Universität Ulm
Fakultät für Mathematik
Abteilung Stochastik

Seminar

BILDSEGMENTIERUNG UND COMPUTER VISION

Level Set Methoden I

Sarah Eve Wiedemann

WS 2005/2006

Inhaltsverzeichnis

1	Level Set Methoden - Eine Einführung	2
2	Die Level Set Gleichung und Lösungsverfahren für extern erzeugte Geschwindigkeitsfelder	4
2.1	Die Level Set Gleichung	4
2.2	Upwind Differencing	6
2.3	Hamilton-Jacobi Lösungsansatz	8
3	Die Level Set Gleichung und Lösungsverfahren für sich selbst erzeugte Geschwindigkeitsfelder	11
4	Fazit	14
	Literatur	15

1 Level Set Methoden - Eine Einführung

Die Level Set Methode ist eine vielseitige Methode, die es ermöglicht, die Bewegung eines Interface in zwei oder drei Dimensionen zu analysieren und zu berechnen. Das Interface Φ trennt zwei Flächen voneinander, wie man in Abbildung 1 sieht.

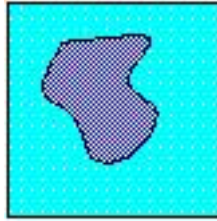


Abbildung 1: Darstellung einer Grenzfläche

Mathematisch wird Φ als die implizite Funktion mit $\Phi(\vec{x}) = 0$ für jeden Punkt \vec{x} dargestellt. Wenn $\Phi(\vec{x}) > 0$ liegt \vec{x} außerhalb des Objektes. Falls $\Phi(\vec{x}) < 0$, liegt \vec{x} innerhalb des Objektes.

Die Geschwindigkeit \vec{V} auf der Oberfläche beschreibt, wie jeder Punkt auf dem Interface bewegt werden kann. Mathematisch ist \vec{V} ein Skalar, d.h. $V(\vec{x}) = \langle u, v, w \rangle$ mit $\vec{x} = (x, y, z)$. In der Realität hängt \vec{V} von diversen physikalischen Effekten ab.

Dies lässt sich sehr schön am Beispiel von Wasser und Eis verdeutlichen. Als Beispiel diene ein eisbedeckter See, bei dem das Eis taut. Die Grenzfläche (hier das Interface) schrumpft, wenn das Eis schmilzt, z.B. auf Grund von wärmeren Temperaturen. Falls die Wetterlage aber umschlägt, kann das Wasser wieder gefrieren und die Eisoberfläche wachsen. Das Geschwindigkeitsfeld \vec{V} wird in diesem Beispiel von der Temperatur bestimmt.

Ein anderes alltägliches Beispiel ist eine Tasse Tee mit Honig. Das Interface bewegt sich, sobald der Honig, das schwere Fluid, in den Tee, das leichte Fluid, fällt. Das Geschwindigkeitsfeld \vec{V} wird von der Gravitationskraft, dem Verhältnis der Fluid-dichten und der Oberflächenspannung der Fluide bestimmt. Dies macht auch deutlich, dass das Geschwindigkeitsfeld \vec{V} durch mehrere externe Kräfte erzeugt werden kann.

Der Level Set Ansatz hilft die Gleichung des Interface zu bestimmen. Dieses Vorgehen ist vereinfacht in Abbildung 2 dargestellt.

Der Level Set Ansatz fügt dabei die Originalkurve (rote Kurve) in eine passende Oberfläche, den blauen Körper ein, wobei dieser Körper von der xy-Ebene genau so geschnitten wird, dass die Schnittfläche der Originalkurve entspricht.

Die blaue Oberfläche wird als Level-Set Funktion bezeichnet, die als Input jeden Punkt der Ebene akzeptiert und die Höhe des Punktes zurückliefert. Die rote Fläche ist das zero-level set, d.h. die Sammlung all derer Punkte, die die Höhe Null haben.

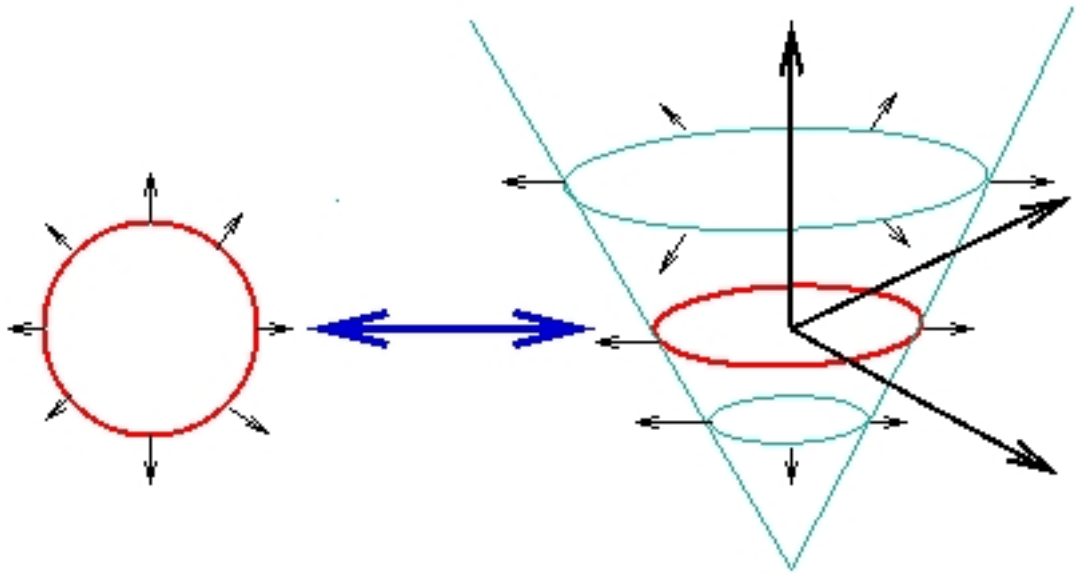


Abbildung 2: Darstellung der Originalkurve und der dazugehörigen Level Set Funktion

Das zero-level set wird mathematisch als implizite Funktion bezeichnet und ist bereits als Interface in den Beispielen erwähnt worden.

Das Interessante an diesem Ansatz ist, dass die Level Set Funktion durch ihre Ausprägungen den Hauptteil der Arbeit, d.h. die Segmentierung des Bildes, übernimmt.

Zurückkommend auf das Beispiel mit dem Wasser erkennt man, dass die Lösung bei einer gegebenen Position startet und sich mit der Zeit, z.B. den Jahreszeiten, entwickelt.

In der Realität wird das gesuchte Interface später mit Hilfe von \vec{V} berechnet. Dafür benötigt man allerdings ein sich selbst erzeugendes Geschwindigkeitsfeld. Da dieses aber wesentlich komplexere Lösungsmethoden fordert, wird in dieser Arbeit zuerst der vereinfachte Fall des extern vorgegebenen Geschwindigkeitsfeldes erörtert.

2 Die Level Set Gleichung und Lösungsverfahren für extern erzeugte Geschwindigkeitsfelder

2.1 Die Level Set Gleichung

Die Geschwindigkeit $V(\vec{x})$ auf der eingeschlossenen Oberfläche ist als Skalar $\langle u, v, w \rangle$ mit $\vec{x} = (x, y, z)$ zu beschreiben. Sie kann durch mehrere externe Quellen bestimmt werden.

Die implizite Funktion Φ , die die Kontur (grüne Linie) der Grenzfläche in Abbildung 3 darstellt, ist an jedem Punkt \vec{x} gleich Null.

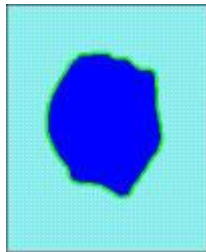


Abbildung 3: Darstellung einer Grenzfläche

Wenn alle Punkte mit der Geschwindigkeit \vec{V} auf der Oberfläche bewegt werden sollen, so kann man dies mit der Lagrangen Formulierung der Oberflächenevolutionsgleichung darstellen:

$$\frac{d(\vec{x})}{dt} = \vec{V}(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \text{ mit } \Phi(\vec{x}) = 0$$

Außer im Eindimensionalen liegt eine unendliche Anzahl an Punkten vor, die es erfordern die Front in eine endliche Anzahl von Stücke zu diskretisieren. Dies ist aber nicht immer problemlos möglich, da dabei oft das Geschwindigkeitsfeld verzerrt wird. Zudem muss die Diskretisierung der Oberfläche angepasst und häufig geändert werden, wodurch ein sehr hoher Rechenaufwand erforderlich wird. Die Ergebnisse weisen jedoch trotzdem nicht die gewünschte Genauigkeit auf.

Um diese Probleme mit Instabilität, Deformation der Oberflächenelemente und den komplizierten Prozeduren für das topologische Reparieren von Grenzflächen zu vermeiden, haben Shu und Osher die Bewegung der Grenzfläche durch die implizite Funktion Φ dargestellt.

Die sich daraus ergebende Gleichung wird als Level Set Gleichung, auch einfache Konvektionsgleichung genannt, bezeichnet:

$$\Phi_t + \vec{V}\nabla\Phi = 0 \quad (1)$$

mit Φ_t partielle Ableitung nach der Zeit t
 $\nabla\Phi = \left(\frac{\Phi}{\Delta x}, \frac{\Phi}{\Delta y}, \frac{\Phi}{\Delta z}\right) = (\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z)$
 $\vec{V}\nabla\Phi = u\Phi_x + v\Phi_y + w\Phi_z$

Eine grafische Darstellung der einzelnen Komponenten findet sich in Abbildung 4.

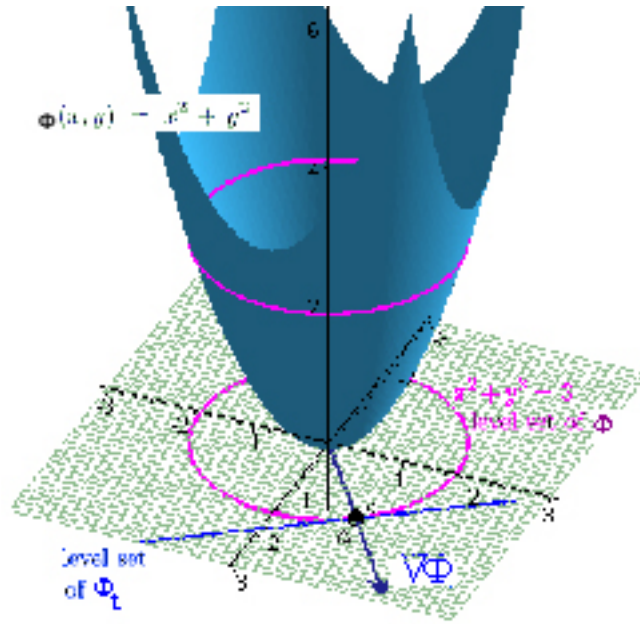


Abbildung 4: Darstellung einer Level Set Funktion

Dieser Ansatz unterscheidet zwischen den Bewegungsrichtungen. Die Normalenrichtung, die hier durch den Gradientenoperator von Φ dargestellt wird, hilft später die Kontur zu verkleinern. Die Tangentialrichtung, hier dargestellt durch Φ_t bestimmt die Grenzflächenbewegung und dient somit dazu, die Kontur an das Objekt anzupassen.

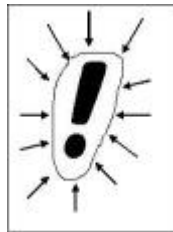


Abbildung 5: Bewegung der Grenzfläche

Dies ist einfach zu realisieren, solange das Geschwindigkeitsfeld über die Grenzfläche hinaus auf ganz Ω definiert ist. Falls dies nicht der Fall ist, muss vor der Berechnung eine Definition zumindest auf einem Band, das die Grenzfläche enthält, vorgenommen werden. Dies hilft Variationen des Geschwindigkeitsfeldes, die z.B. durch Unstetigkeiten gegeben sein können, zu minimieren. Die minimale Geschwindigkeitsableitung kann durch das Beschränken der Grenzfeldgeschwindigkeit \vec{V} auf eine Konstante in Normalenrichtung zur Grenzfläche erreicht werden. Das heißt $\vec{V}(\vec{x}) = \vec{V}(\vec{x}_c)$ mit \vec{x}_c nahester Punkt der Grenzfläche zu \vec{x} .

2.2 Upwind Differencing

Die Level Set Gleichung (1) kann mit Hilfe numerischer Methoden gelöst werden. Ein einfacher Ansatz für eine Lösung im Zweidimensionalen stellt das upwind Differencing, zu Deutsch „windwärts differenzieren“ dar.

Die bereits bekannte Gleichung wird zuerst nach der Zeit diskretisiert. Daraus ergibt sich folgende Gleichung

$$\frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta t} + \vec{V}^n \nabla \Phi^n = 0 \quad (2)$$

\vec{V}^n ist das externes Geschwindigkeitsfeld zur Zeit t^n und $\nabla \Phi^n$ der Gradientenoperator mit Werten Φ zurzeit t^n .

t^n und t^{n+1} seien zwei verschiedene Zeitpunkte mit $t^{n+1} - t^n = \Delta t$, zu denen gilt:

$$\begin{aligned} \Phi^n &= \Phi(t^n) \\ \Phi^{n+1} &= \Phi(t^{n+1}) = \Phi(t^n + \Delta t) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen des Skalars für die Geschwindigkeit und die Reduzierung der Gleichung auf eine Dimension erhält man folgende vereinfachte Gleichung:

$$\frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta t} + u^n \Phi_x^n = 0 \quad (3)$$

Diese Reduzierung auf eine Dimension vereinfacht das Differenzieren. Die anderen Dimensionen können problemlos durch weitere Betrachtung jeder einzelnen Dimension erfasst werden. Dies bedeutet, dass die Gleichung und Vorgehensweise für $v_n \Phi_y^n$ wie auch $w_n \Phi_z^n$ identisch ist und analog erfolgen kann.

Im nächsten Schritt wird ein fester Gitterpunkt x_i gewählt, der die räumliche Variation vermindert.

$$\frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta t} + u_i^n (\Phi_x)_i^n = 0 \quad (4)$$

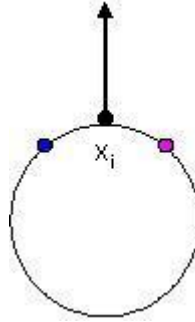


Abbildung 6: Fester Gitterpunkt zur Vermeidung der Variation

Der eigentliche Kern des upwind differencing stellt die Betrachtung von u_i und seines Vorzeichens dar. Ist $u_i > 0$ wird das Objekt von links nach rechts bewegt.

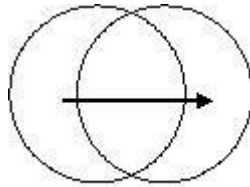


Abbildung 7: Bewegung der Kontur

Dadurch wird Φ_x^- approximiert mit $\Phi_x^- = \frac{(\Phi_x)_i^n - (\Phi_x)_{i-1}^n}{\Delta x}$

Für den Fall, dass $u_i < 0$ ist, bewegt sich das Objekt von rechts nach links. Dadurch wird Φ_x^+ mit $\Phi_x^+ = \frac{(\Phi_x)_{i+1}^n - (\Phi_x)_i^n}{\Delta x}$ approximiert.

Das Upwind differencing ist nicht nur relativ einfach zu berechnen, sondern in gewissen Grenzen auch numerisch stabil. Numerisch stabil bedeutet, dass das upwind differencing gegenüber kleinen Störungen innerhalb der vorgegebenen Geschwindigkeit \vec{V} unempfindlich ist. Die Grenzen werden durch die Courant-Friedrichs-Lewy Bedingung (CFL-Bedingung) bestimmt. Für ein hyperbolisches System sieht die Bedingung wie folgt aus:

$$\Delta t \left(\frac{\max |u|}{\Delta x} \right) = \alpha \quad \text{mit } 0 < \alpha < 1 \quad (5)$$

Dabei ist $\max |u|$ der größte Wert auf dem Gitter. In der Realität genügt jedoch meistens der Wert von $|u|$ auf der Grenzfläche. Häufig und als fast optimale Wahl wird $\alpha = 0.9$ betrachtet, konservativer ist es $\alpha = 0.5$ zu setzen. Problemlos kann die CFL-Bedingung auch für mehrere Dimensionen angewendet werden:

$$\Delta t \left(\frac{\max |\vec{V}|}{\min \Delta x, \Delta y, \Delta z} \right) = \alpha \quad \text{mit } 0 < \alpha < 1$$

Eine Alternative zum Upwind differencing ist das zentrale Differenzieren. Dies ist jedoch wesentlich instabiler und wird erst bei selbst erzeugten Geschwindigkeitsfeldern von Interesse sein.

2.3 Hamilton-Jacobi Lösungsansatz

Das upwind Differencing lieferte bis jetzt nur Ergebnisse für die Dimension 1. Gerade in den Naturwissenschaften ist es jedoch von großem Interesse, höhere Dimensionen betrachten zu können. Ein Ansatz zur Lösung dieser Problematik ist das Hamilton-Jacobi Regelwerk. Eine Hamilton-Jacobi Gleichung sieht dabei wie folgt aus:

$$\Phi_t + H(\nabla\Phi) = 0 \tag{6}$$

H ist dabei eine Funktion, die von Zeit und Raum abhängt. Gleichzeitig ist H eine klassische partielle Differentialgleichung (PDE = Partial Differential Equation).

Diese Gleichung kann nun ohne größere Probleme umformuliert werden. Es folgt zunächst:

$$(\Phi_x)_t + H(\Phi_x)_x = 0 \tag{7}$$

Im nächsten Schritt wird Φ_x durch u ersetzt. Daraus ergibt sich folgende Gleichung:

$$(u)_t + H(u)_x = 0 \tag{8}$$

Diese Gleichung wird auch als Erhaltungsgesetz bezeichnet, welches besagt, dass der Gesamtbetrag von Masse und Energie in einem geschlossenen System unveränderlich bleibt. Lediglich die Zustände im System können sich ändern. Diese Herleitung ermöglicht es, viele nützliche Eigenschaften für das Hamilton-Jacobi Regelwerk zu übernehmen. Zum Beispiel kann man direkt ableiten, dass die Lösung für Φ stetig ist, oder dass, wenn die 1.Ableitung der Funktion einen Knick hat, auch die Hamilton-Jacobi Gleichung einen Knick hat (selbst wenn die gegebenen Daten zu Beginn glatt waren). Diese Analogie vermindert den Arbeits- und Rechenaufwand.

Zurückkommend auf die Level-Set Gleichung, kann man das Hamilton-Jacobi Regelwerk erweitern und eine grundlegend nicht oszillierende polynomiale Interpolation (essentially nonoscillatory ENO) dieser Gleichung vornehmen. Dies entspricht einer

Erweiterung der numerischen Diskretisierung des Erhaltungsgesetzes. Diese Methode erlaubt eine Erweiterung des eindimensionalen upwind differencing zu höherdimensionaler Genauigkeit, durch eine bessere numerische Approximation von Φ_x^+ und Φ_x^- . Die Geschwindigkeit \vec{V} hilft weiterhin zu entscheiden, ob Φ_x^+ oder Φ_x^- genutzt werden soll.

In der Praxis verwendet man bei diesem Verfahren Newtonsche Interpolationspolynome und Differenzenquotienten. Durch die Interpolation wird Φ bestimmt. Φ_t wird anschließend durch Ableiten ermittelt. So erhält man für Φ_x^- die folgenden möglichen Approximationen:

$$\Phi_x^1 = \frac{\Phi_{i-2}^-}{3} - \frac{7\Phi_{i-1}^-}{6} + \frac{11\Phi_i^-}{6} \quad (9)$$

$$\Phi_x^2 = \frac{-\Phi_{i-1}^-}{6} + \frac{5\Phi_i^-}{6} + \frac{\Phi_{i+1}^-}{3} \quad (10)$$

$$\Phi_x^3 = \frac{\Phi_i^-}{3} + \frac{5\Phi_{i+1}^-}{6} - \frac{\Phi_{i+2}^-}{6} \quad (11)$$

Das Ziel ist es, die Approximation mit dem geringsten Fehler zu wählen, indem man das glattestmögliche Interpolationspolynom von Φ wählt.

Bei dem gerade beschriebenen Schema werden jedoch alle Daten, egal ob sie Unstetigkeiten aufweisen oder nicht gleich bewertet. Unstetigkeiten bzw. Variationen verschlechtern jedoch das Ergebnis. Deswegen wurde eine Erweiterung der ENO Methode entwickelt, die es ermöglicht Unstetigkeiten oder anderen Variationen der Daten möglichst wenig Gewicht zu geben.

Φ_x kann wie folgt umgeschrieben werden, dabei wird der Fehler um die Größenordnung 3 reduziert:

$$\Phi_x = \omega_1 \Phi_x^1 + \omega_2 \Phi_x^2 + \omega_3 \Phi_x^3 \quad (12)$$

mit den Gewichten ω_k , $k = 1, 2, 3$

$$0 \leq \omega_k \leq 1$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$$

Um die Gewichte zu berechnen wird ein Beispiel betrachtet, dass der optimalen Wahl der Gewichte entspricht:

$$\text{Aus} \quad \omega_1 = 0,1 + O(\Delta x^2)$$

$$\omega_2 = 0,6 + O(\Delta x^2)$$

$$\omega_3 = 0,3 + O(\Delta x^2)$$

2 Die Level Set Gleichung und Lösungsverfahren für extern erzeugte Geschwindigkeitsfelder

$$\begin{aligned} \text{folgt: } \Phi_x &= 0, 1\Phi_x^1 + 0, 6\Phi_x^2 + 0, 3\Phi_x^3 \\ &= c_1(\Delta x^2)\Phi_x^1 + c_2(\Delta x^2)\Phi_x^2 + c_3(\Delta x^2)\Phi_x^3 \end{aligned}$$

Diese Gleichung liefert eine optimale Approximation des Terms Φ_x plus einen Fehlerterm $O(\Delta x^5) = (O(\Delta x^2)O(\Delta x^3))$. Allgemein kann man die Gewichte wie folgt herleiten:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{13}{12}(\Phi_{i-2}^- - 2\Phi_{i-1}^- + \Phi_i^-)^2 + \frac{1}{4}(\Phi_{i-2}^- - 4\Phi_{i-1}^- + 3\Phi_i^-)^2 \\ S_2 &= \frac{13}{12}(\Phi_{i-1}^- - 2\Phi_i^- + \Phi_{i+1}^-)^2 + \frac{1}{4}(\Phi_{i-1}^- - \Phi_{i+1}^-)^2 \\ S_3 &= \frac{13}{12}(\Phi_i^- - 2\Phi_{i+1}^- + \Phi_{i+2}^-)^2 + \frac{1}{4}(3\Phi_i^- - 4\Phi_{i+1}^- + \Phi_{i+2}^-)^2 \end{aligned}$$

Nun können die α_k definiert werden, d.h.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{0, 1}{(S_1 + \varepsilon)^2} \\ \alpha_2 &= \frac{0, 6}{(S_2 + \varepsilon)^2} \\ \alpha_3 &= \frac{0, 3}{(S_3 + \varepsilon)^2} \\ \text{mit } \varepsilon &= 10^{-6} \max\{v_1^2, v_2^2, v_3^2, v_4^2, v_5^2\} + 10^{-99} \end{aligned}$$

Der Term 10^{-99} soll vermeiden, dass durch 0 geteilt wird. Die Gewichte können schließlich aus den α_k berechnet werden.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ \omega_2 &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ \omega_3 &= \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \end{aligned}$$

Dieses Verfahren funktioniert für kleine wie auch große S_k und erzeugt optimale Gewichte. Falls jedoch alle S_k sehr groß werden, sind die Daten schlecht konditioniert und unbrauchbar und ein Abbruch der Rechnung ist nötig.

3 Die Level Set Gleichung und Lösungsverfahren für sich selbst erzeugte Geschwindigkeitsfelder

Bis jetzt wurden nur extern vorgegebene Geschwindigkeitsfelder \vec{V} betrachtet. Dies ist zwar der einfachste, aber auch der in der Realität der seltenste Fall.

Im Kommenden wird deshalb ein selbst erzeugtes Geschwindigkeitsfeld betrachtet, in das mehrere verschiedene - oft bekannte - Faktoren einfließen können.

\vec{V} besteht dabei aus drei Elementen:

$$\vec{V} = -b\kappa\vec{N} \quad (13)$$

\vec{N} ist die Normale mit $\vec{N} = \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}$ und κ die durchschnittliche Krümmung des Interface, die definiert ist als

$$\begin{aligned} \nabla\vec{N} &= \frac{\partial n_1}{\partial x} + \frac{\partial n_2}{\partial y} + \frac{\partial n_3}{\partial z} \\ &\text{mit } \vec{N} = (n_1, n_2, n_3). \end{aligned}$$

Dies lässt sich mit Hilfe der impliziten Funktionen genauer beschreiben:

$$\begin{aligned} \kappa &= \nabla\left(\frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}\right) \\ &= \frac{(\Phi_x^2\Phi_{yy} - \Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} + \Phi_y^2\Phi_{xx} + \Phi_x^2\Phi_{zz} - 2\Phi_x\Phi_z\Phi_{xz} \\ &\quad + (\Phi_z^2\Phi_{xx} + \Phi_y^2\Phi_{zz} - 2\Phi_y\Phi_z\Phi_{yz} + \Phi_z^2\Phi_{yy}))}{|\nabla\Phi|^3} \end{aligned}$$

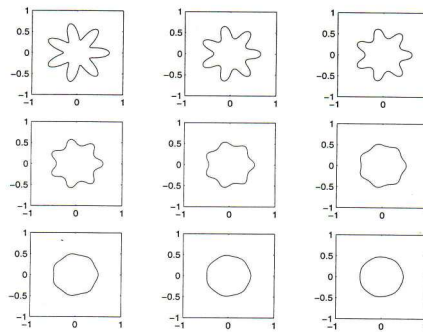


Figure 4.2. Evolution of a star-shaped interface in a curvature-driven flow. The tips of the star move inward, while the gaps in between the tips move outward.

Abbildung 8: Entwicklung eines sternförmigen Interface

3 Die Level Set Gleichung und Lösungsverfahren für sich selbst erzeugte Geschwindigkeitsfelder

Dagegen muss b differenzierter betrachtet werden. Für $b < 0$ dehnt sich das Objekt zunehmend aus. Dies führt zu kleinen Störungen, die nicht trivial behoben werden können (siehe Abbildung 8). Dadurch ist $b < 0$ ein schlecht formuliertes Problem, dass in der Realität nicht betrachtet wird.

Für $b > 0$ zieht sich das Objekt immer mehr zusammen, so dass es im zweidimensionalen auf einen Punkt zusammenschrumpft. Dies ist der in der Realität am häufigsten betrachtete Fall. Ein Beispiel sieht man in Abbildung 9.

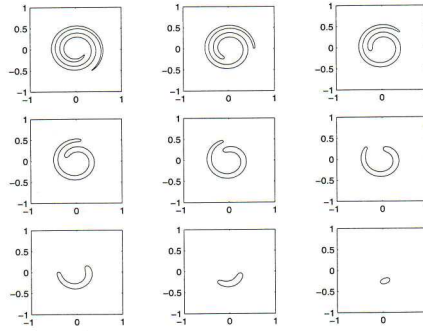


Figure 4.1. Evolution of a wound spiral in a curvature-driven flow. The high-curvature ends of the spiral move significantly faster than the elongated body section.

Abbildung 9: Entwicklung einer gewickelten Spirale

Insgesamt kann \vec{V} in einem selbstgenerierten Geschwindigkeitsfeld als die Bewegung der Durchschnittskrümmung, bei der die Grenzfläche sich in Normalenrichtung mit einer Geschwindigkeit proportional zu ihrer Krümmung bewegt, beschrieben werden.

Diese neue Definition der Geschwindigkeit führt zur Level Set Gleichung

$$\Phi_t + V_n |\nabla\Phi| = 0 \quad \text{mit } V_n \text{ Normalengeschwindigkeit} \quad (14)$$

Obwohl diese der Level Set Gleichung für externe Geschwindigkeitsfelder sehr ähnelt, sind doch wesentlich komplexere numerische Methoden, wie z.B. das zentrale Differenzieren oder das Crank Nicholson Schema nötig, um diese Gleichung zu lösen. Diese Schematas würden den Umfang der Arbeit sprengen, können aber in [1] auf Seite 44 und 45 nachgelesen werden.

Ein praktisches Beispiel für eine Level Set Gleichung mit selbst erzeugtem Geschwindigkeitsfeld ist die Konvektions-Diffusions Gleichung:

$$\Phi_t + V_n |\nabla\Phi| = 0 \quad (15)$$

Dies Gleichung kann vereinfacht werden, wenn Φ eine Distanzfunktion mit Vorzeichen ist.

$$\Phi_t + \vec{V} \nabla \Phi = b \Delta \Phi \quad (16)$$

3 Die Level Set Gleichung und Lösungsverfahren für sich selbst erzeugte Geschwindigkeitsfelder

Diese enthält den Effekt eines externen Geschwindigkeitsfeld \vec{V} und einen Diffusionsterm. Lösen kann man diese Gleichung durch Kombination zweier bekannter Methoden: Der Term $\vec{V} \nabla \Phi$ wird mit upwind differencing aus Kapitel 2 gelöst, während $b \Delta \Phi$ durch zentrale Differenzen bestimmt werden kann, die wie folgt aussehen:

$$\Phi_{xx} \approx \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (17)$$

$$\Delta \Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} \quad (18)$$

Die numerische Stabilität ergibt sich wieder mit Hilfe der CFL-Bedingung. Diese lautet

$$\Delta t \left(\frac{2b}{(\Delta x)^2} + \frac{2b}{(\Delta y)^2} + \frac{2b}{(\Delta z)^2} \right) < 1 \quad \text{mit } \Delta t = O(\Delta x^2) \quad (19)$$

Diese kombinierten Lösungen kommen den praktischen Problemen meist am nächsten und sind am sinnvollsten zu betrachten.

4 Fazit

Die Level-Set Methode ist nicht nur wesentlich einfacher zu berechnen, wie andere Methoden. Sie bietet gegenüber den bis heute verwendeten Methoden viele Vorteile. Mit Hilfe der Level-Set Methode kann man Kurven oder Oberflächen auf räumlich festen Koordinaten berechnen und somit eine Parametrisierung umgehen. Dies ermöglicht auch eine problemlose Berechnung im Dreidimensionalen. Zudem muss die Topologie nicht bekannt sein und kann sich sogar während der Berechnung ändern, ohne dass dies die Level Set Methode beeinflusst.

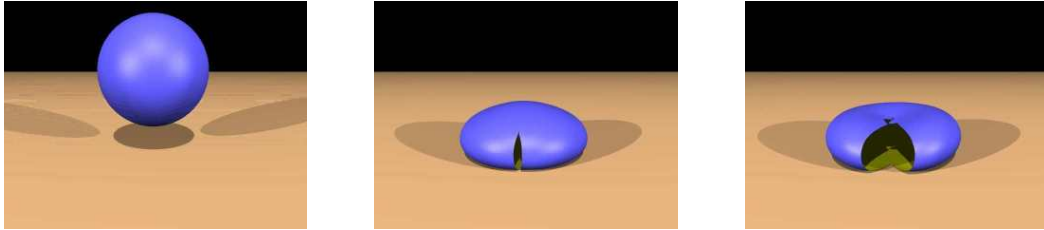


Abbildung 10: Topologieänderungen

Dadurch ist es möglich, auch ungenaue Konturen zu erfassen und trotz allem sehr genaue Berechnungen anzustellen. Die Level Set Methode bzw. die Erweiterung zur Particle Level Set Methode (genauerer siehe Vortrag M. Lemming) ermöglicht dabei eine wesentlich akkuratere Berechnung wie alle bisher bekannten Ansätze und ermittelt ein sehr genaues Bild auch wenn die Anzahl der Objekte im Bild unbekannt ist.

Diese Vorteile zeigen auch auf, warum die Level-Set Methoden im Bereich Bildsegmentierung gerne und häufig genutzt werden.

Insgesamt werden die Level Set Methoden schon in vielen verschiedenen Bereichen eingesetzt. In der Medizin gibt es ein viel versprechendes Projekt über den Einsatz bei der Betrachtung von Arterien. Dies ist möglich, da der Level Set Ansatz auch sehr kleine Elemente segmentieren kann. Ein weiteres Einsatzgebiet ist bei der Berechnung der Bewegung verschiedener Fluide in der Physik zu finden. Aber auch bei der Kollisionsvermeidung von Flugzeugen und in der Informatik, insbesondere in der Robotik, werden Level Set Methoden eingesetzt.

Nachteile der Level Set Methode, die sich im praktischen Einsatz zeigen, sind die fehlende Möglichkeiten, Objekte mit Loch zu erkennen, sowie fehlende Bildsegmente zu berechnen.

Dennoch ist sie im Moment im Bereich der Bildsegmentierung eine der fortschrittlichsten Methoden.

Literatur

- [1] S.Osher, R.Fedkiw: Level set methods and dynamic implicit surfaces:
Springer, 2003

- [2] W.Press, S.Teukolsky, W.Vettering, B.Flannery: Numerical Recipes in C++:
Cambridge University Press, 1988-1992

- [3] J.A.Sethian:A Fast Introduction to Level Set Methods:
URL: http://math.berkeley.edu/~sethian/Explanations/level_set_explain.html
(Stand 29.11.2005)

- [4] URL: <http://graphics.stanford.edu/~fedkiw/> (Stand 29.11.2005)

- [5] W.Egartner:Grundlagen der Numerik physikalischer Erhaltungsgesetze:
URL: http://egartner.de/num_claw.pdf
(Stand 29.11.2005)

- [6] URL: <http://www.wikipedia.de>
(Stand 29.11.2005)

- [7] Robert Croce:Ein paralleler,dreidimensionaler Navier-Stokes-Löser für inkom-
pressible Zweiphasenströmung mit Oberflächenspannung, Hindernissen und
dynamischen Kontaktflächen
URL: http://wissrech.ins.uni-bonn.de/teaching/diplom/diplom_croce.pdf
(Stand 29.11. 2005)

- [8] http://www.bic.mni.mcgill.ca/users/maudette/fem_home.html
(Stand 29.11.2005)

- [9] Illustration of Level Set and Gradient
URL: [http://www.ualberta.ca/dept/math/gauss/fcm/calculus/multvrbl/basic/
ImplctFunctns/implct_functn_illstrn1.htm](http://www.ualberta.ca/dept/math/gauss/fcm/calculus/multvrbl/basic/ImplctFunctns/implct_functn_illstrn1.htm)
(Stand 29.11.2005)