

# Fraktale: Eine Einführung



Fraktale Geometrie und ihre Anwendungen  
Seminar im WS 06/07

Florian Daikeler

Betreuer: Jun.-Prof. Dr. Evgeni Spodarev



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>5</b>
1.1	ABSTRACT . . . . .	5
1.2	Die Cantor-Drittelmenge . . . . .	5
1.3	Eigenschaften des Cantor-Staubes . . . . .	6
1.3.1	Mächtigkeit . . . . .	6
1.3.2	Wahrscheinlichkeit . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Fraktale in 2D - Selbstähnlichkeit und der Begriff des Fraktals</b>	<b>7</b>
2.1	Selbstähnlichkeit im strengen Sinn . . . . .	7
2.2	Die Selbstähnlichkeitsdimension $d_S$ . . . . .	8
2.3	Der Begriff des Fraktals . . . . .	8
2.4	Beispiele . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Fraktale höherer Dimension</b>	<b>15</b>
3.1	Der Menger-Schwamm . . . . .	15
3.2	Physiologische Flächen . . . . .	16
3.3	Erstes Würfelfraktal . . . . .	17
3.4	Zweites Würfelfraktal . . . . .	18
3.5	Weitere Fraktale und höhere Dimensionen . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Selbstähnlichkeit im weiteren Sinn</b>	<b>21</b>
4.1	Ein „neuer“ Dimensionsbegriff . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Selbstaffinität</b>	<b>25</b>
5.1	Die Barnsley-Maschine . . . . .	25
5.2	Verwendung von IFS-Codes . . . . .	27



# Kapitel 1

## Einführung

### 1.1 ABSTRACT

Im Folgenden werden wir uns mit verschiedenen Begriffen der Selbstabbildung und der Dimension beschäftigen um dann sehr schnell den Begriff des Fraktals zu erklären. Zudem werden Wege aufgezeigt, wie man Fraktale konstruieren kann und welchen Nutzen sie haben.

### 1.2 Die Cantor-Drittelmenge

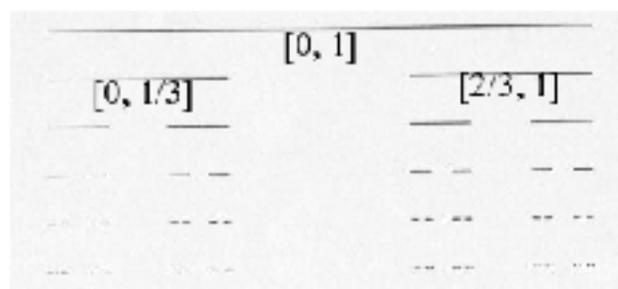


Abbildung 1.1: Cantor-Drittelstaub

Obiges Bild zeigt uns den sogenannten Cantor Drittelstaub bzw. das Cantor Diskontinuum, welches von Georg Cantor (1845 - 1918) entdeckt wurde. Dabei startet man mit einer Strecke, etwa dem abgeschlossenen Intervall  $[0, 1]$ . Das Intervall wird in 3 gleiche Teile geteilt. Das mittlere offene Intervall wird herausgewischt und es bleiben die Intervalle  $[0, \frac{1}{3}]$  und  $[\frac{2}{3}, 1]$  übrig. Diese werden wieder dreigeteilt... das Verfahren wiederholt sich. Nach  $n$  Schritten erhalten wir  $2^n$  abgeschlossene Intervalle der Länge  $\frac{1}{3^n}$ . Betrachtet man diesen Vorgang für „ $\lim_{n \rightarrow \infty}$ “, so bleibt eine Menge von disjunktem „Staub“.

## 1.3 Eigenschaften des Cantor-Staubes

### 1.3.1 Mächtigkeit

Unter Verwendung einer geeigneten Arithmetisierung, etwa durch Umwandlung von  $[0, 1]$  in „Ternärzahlen“, anschließender Einteilung in die drei Klassen „*abbrechend oder periodisch mit Periode 2*“, „*periodisch mit Periode von 2 verschieden*“, „*weder abbrechend noch periodisch*“ und dem Wissen, dass dieses Intervall überabzählbar ist, kann man zeigen, dass der Cantor-Staub überabzählbar ist.

Nun berechnen wir doch einmal provokativ die Gesamtlänge aller herausgewischten Intervalle

1. Schritt:  $\frac{1}{3}$
2. Schritt:  $2 \cdot \frac{1}{3^2}$
3. Schritt:  $2^2 \cdot \frac{1}{3^3}$
4. Schritt: ...
- n. Schritt:  $2^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n}$

und erhalten mit der geometrischen Reihe  $\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 1$ . Dieses Ergebnis entlockt Verblüffung, denn der Cantor-Staub ist überabzählbar.

### 1.3.2 Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit, beim Werfen eines Pfeils auf das Intervall  $[0, 1]$ , einen Punkt des Cantor-Staubes zu treffen ist 0, denn

$$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{Zahl der günstigen Fälle}}{\text{Zahl der möglichen Fälle}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

*Fazit des ersten Kapitels:* Wir haben eine Menge, das Intervall  $[0, 1]$ , entdeckt, bei der „alles“ herausgewischt wird und dennoch etwas übrig bleibt, das die Mächtigkeit des Kontinuums hat.

# Kapitel 2

## Fraktale in 2D - Selbstähnlichkeit und der Begriff des Fraktals

### 2.1 Selbstähnlichkeit im strengen Sinn

**Definition 1** Gegeben sei eine kompakte Punktmenge  $G$  in einem metrischen Raum. Sie werde in  $N > 1$ , bis auf Randelemente paarweise disjunkte, kongruente Teilmengen  $G_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  zerlegt, also  $G = \cup_{i=1}^N G_i$ . Wenn es dann für alle  $i$  eine Ähnlichkeitsabbildung  $\gamma$  mit  $\gamma(G_i) = G$  gibt, dann heisst  $G$  selbstähnlich im strengen Sinn. Der zugeordnete Vergrößerungsfaktor wird mit  $p$  bezeichnet,  $p > 1$ .

#### Beispiel 1

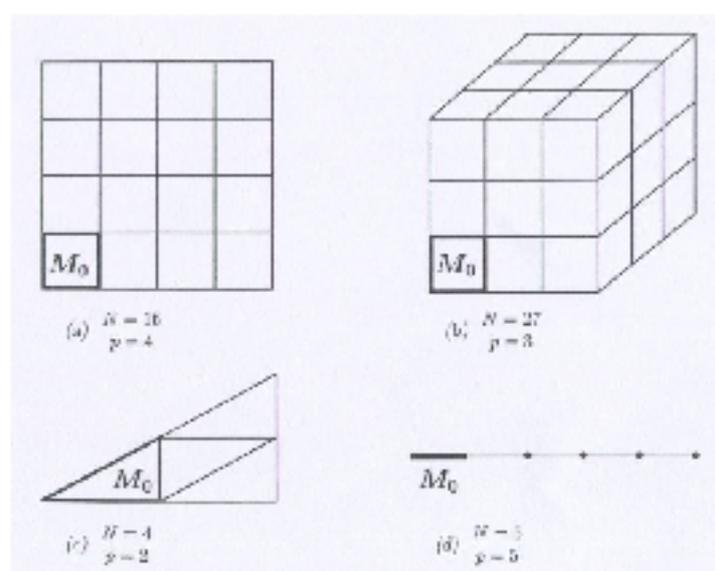


Abbildung 2.1: Einfache Beispiele für selbstähnliche Mengen im strengen Sinn

## 2.2 Die Selbstähnlichkeitsdimension $d_S$

Wenn wir uns obiges *Beispiel 1* etwas genauer betrachten, so stellen wir einen Zusammenhang zwischen den dort angegebenen Größen fest. Es gilt  $p^d = N$ . Dabei ist  $d$  die anschauliche, uns vertraute Dimension.

**Definition 2** *Punktmenge  $G$  die im strengen Sinne selbstähnlich sind, mit  $N$  Zerlegungsmengen und dem Vergrößerungsfaktor  $p$  besitzen die Dimension*

$$d_S(G) = \frac{\log(N)}{\log(p)}$$

*Man spricht von der Selbstähnlichkeitsdimension (Index  $S$ ).*

## 2.3 Der Begriff des Fraktals

Wegen  $N = 2$  und  $p = 3$  hat unser Cantor-Staub, selbst bei einer Verfeinerung mit  $p = 3^n$  und  $N = 2^n$  die Selbstähnlichkeitsdimension

$$d_S = \frac{\log(2^n)}{\log(3^n)} = \frac{n \cdot \log(2)}{n \cdot \log(3)} = \frac{\log(2)}{\log(3)} \approx 0,6309$$

Diese „krumme“ Dimension ist eine echte Überraschung. Dennoch war so etwas zu erwarten, denn unser Cantor-Staub ist weder ein Punkt mit Dimension  $d = 0$  noch eine Strecke mit Dimension  $d = 1$ . Irgendwie liegt er dazwischen. Als Dimension ergibt sich in vielen Fällen eine nicht-ganze Zahl, weshalb man auch von *fraktaler Geometrie* spricht und die betrachteten (Punkt-)Mengen auch *Fraktale* nennt.

### Beispiel 2

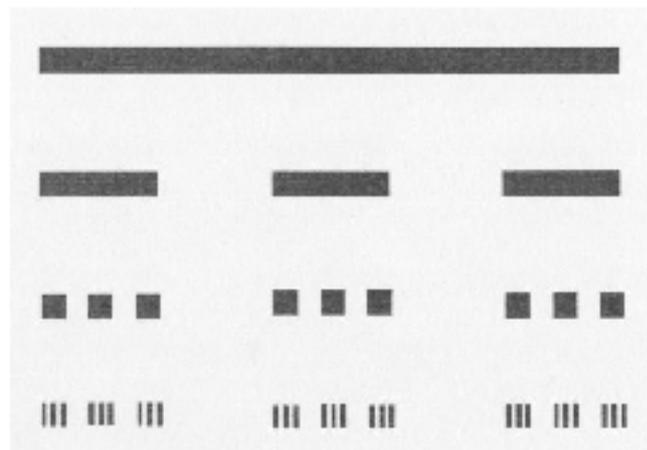


Abbildung 2.2:  $N = 3$   $p = 5$

$$d_S = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 0,6826$$

Im Vergleich zum Cantor-Staub wird nun mehr entfernt:  $\frac{2}{5} > \frac{1}{3}$ . Die Dimension wird aber größer. Dies hängt damit zusammen, dass die Staubdimension kein Maß für das „Gesamtgewicht“ des Staubes ist, sondern viel mehr ein Maß für seine gleichmäßige Verteilung.

$$d_S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{\log(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2(n+1)} = 1$$

## 2.4 Beispiele

**Beispiel 3** *Das Sierpinski Dreieck (Waclaw Sierpinski 1889 - 1969)*

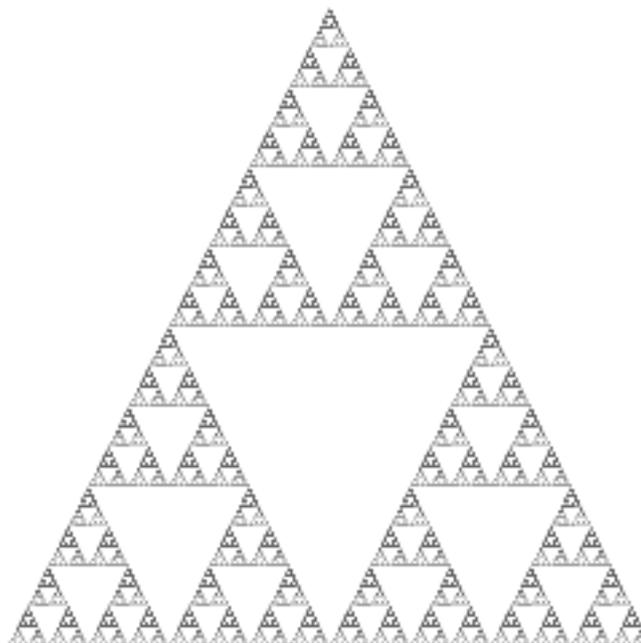
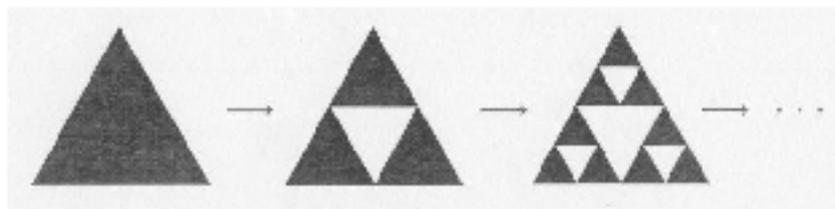


Abbildung 2.3:  $N = 3$   $p = 2$

$$d_S = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1,5850$$

Strecken		Dreiecke	
Länge	Anzahl	Inhalt	Anzahl
$a$	3	$F_0$	1
$\frac{1}{2}a$	$3^2$	$\frac{1}{4}F_0$	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{1}{2^n}a$	$3^{n+1}$	$\frac{1}{4^n}F_0$	$3^n$

mit  $F_0 = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$

*Gesamtumfang der Limesmenge:*

$$L_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} 3a \left(\frac{3}{2}\right)^n \rightarrow \infty$$

*Gesamtinhalt der Limesmenge:*

$$F_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} F_0 \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

**Beispiel 4** Die Kochkurve (Helge von Koch 1870 - 1924)

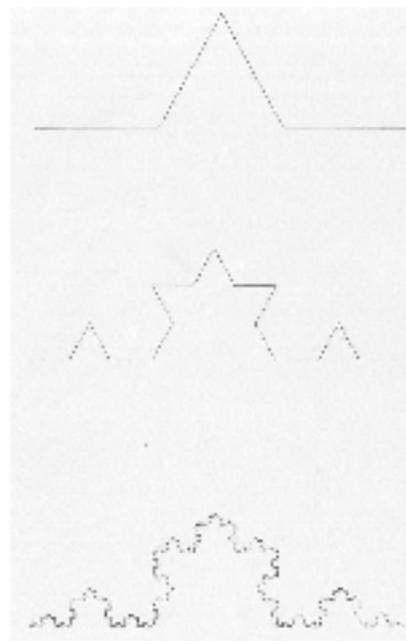


Abbildung 2.4: Koch-Kurve

Die Kochkurve entsteht, indem man die abgeschlossene Strecke  $[0, a]$  in drei kongruente Teile teilt, über dem mittleren Teil ein gleichseitiges Dreieck errichtet und dann die Grundlinie dieses Dreiecks herauswischt. Mit den verbleibenden Strecken verfährt man auf die selbe Weise.

Die Kochkurve besitzt folgende Eigenschaften:

- Die Kochkurve ist überall stetig und nirgends differenzierbar. Stetig, da sie ein stückweise stetiger Polygonzug ist und nirgends differenzierbar, da jeder Punkt einmal „Spitze“ ist. Durch die Betrags-Funktion wissen wir, dass „Spitzen“ nicht differenzierbar sind.
- Die Kochkurve ist selbstähnlich im strengen Sinn mit  $N = 4$ ,  $p = 3$ . Man betrachte die Koch-Kurve über den vier Strecken mit Länge  $\frac{1}{3}a$  nach der ersten Iteration. Jede davon gibt „aufgeblasen“ die gesamte Kochkurve.
- Die Dimension der Koch-Kurve ist  $d_S = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 2 \frac{\log(2)}{\log(3)} \approx 1,2618$ . Mit der Koch-Kurve erkennt man nun: je „zerknitterter“, desto größer die Dimension.
- Die Länge der Koch-Kurve ist  $\infty$ .

Strecken Länge	Anzahl
$a$	1
$\frac{1}{3}a$	4
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{1}{3^n}$	$4^n$

$$L_\infty = a \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

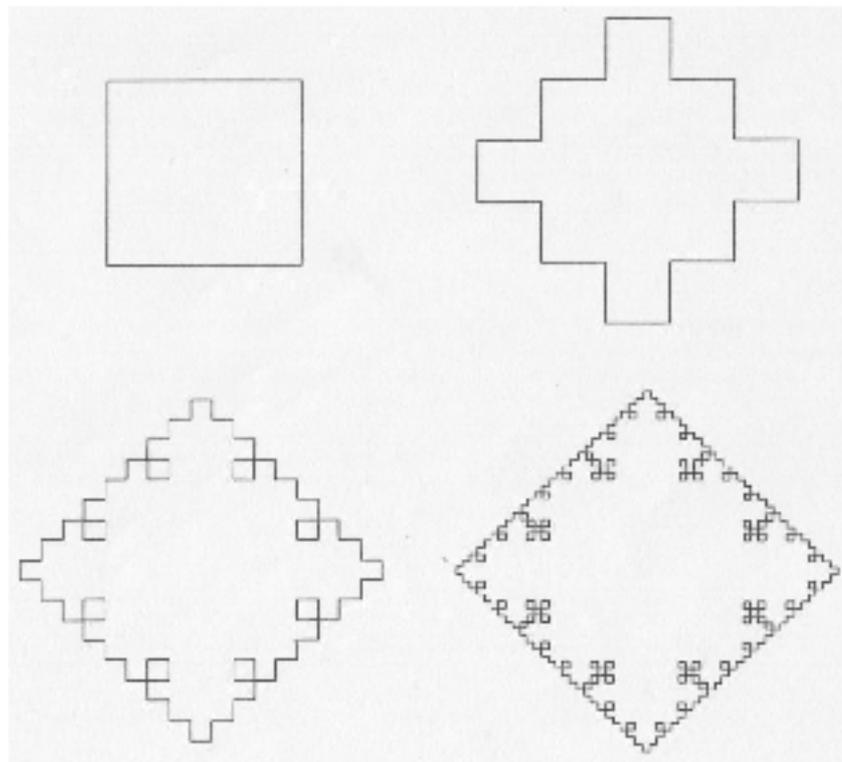
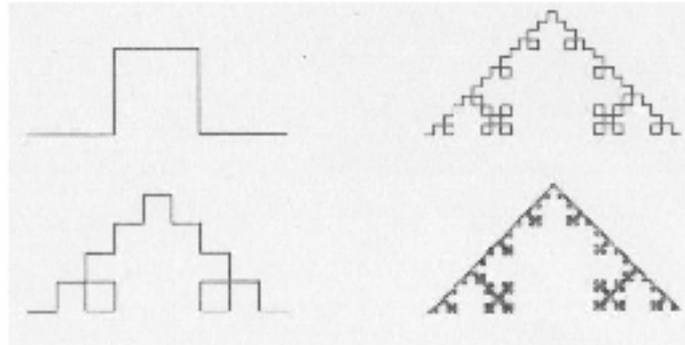
#### Beispiel 5 Die Schneeflockenkurve

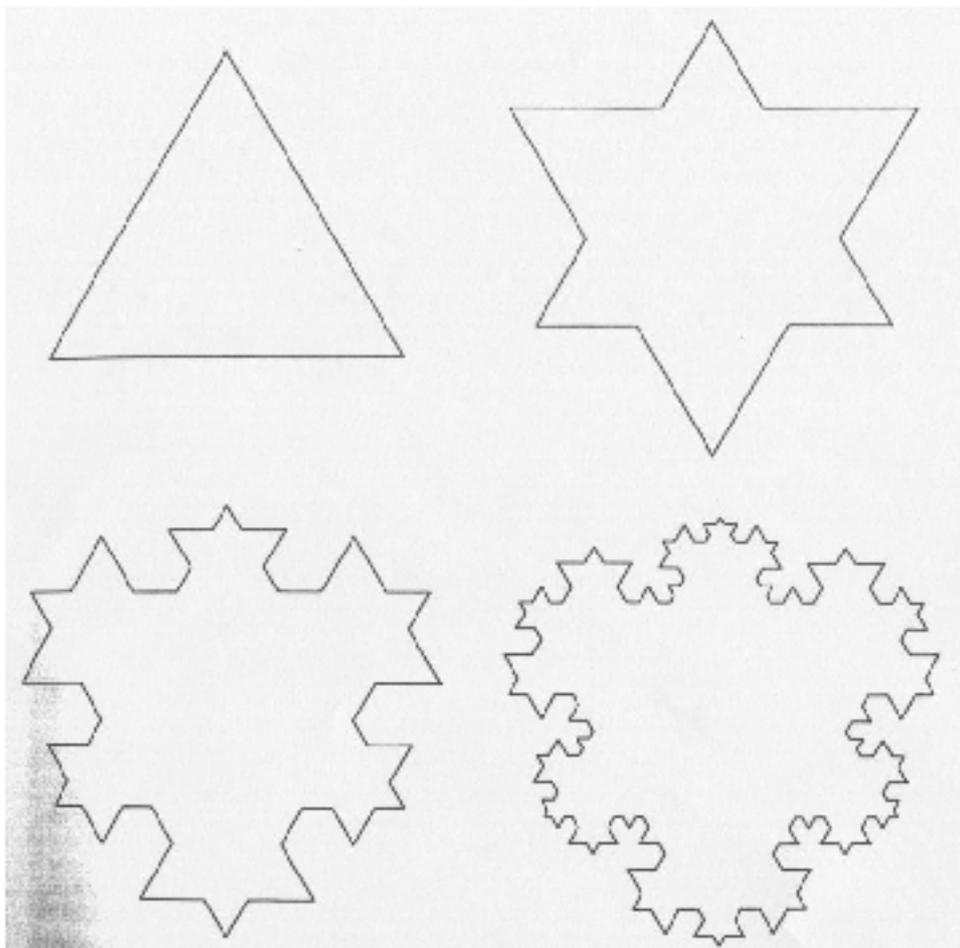
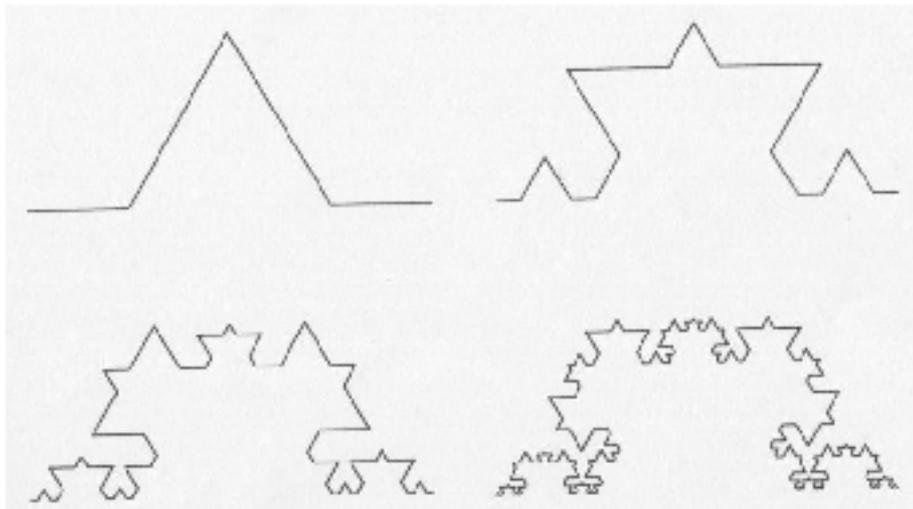


Abbildung 2.5: Schneeflockenkurve

- Die Schneeflockenkurve ist nicht selbstähnlich, denn nimmt man einen Teil der Kurve und „bläst“ ihn auf, so ist darin nicht die gesamte Schneeflockenkurve enthalten.
- Die Schneeflockenkurve hat die selbe Dimension wie die Koch-Kurve.
- Die Länge (Umfang) der Schneeflockenkurve ist  $\infty$ .

**Beispiel 6** Weitere Beispiele für Koch-Kurven







# Kapitel 3

## Fraktale höherer Dimension

Einfache Beispiele für selbstähnliche Mengen

### 3.1 Der Menger-Schwamm

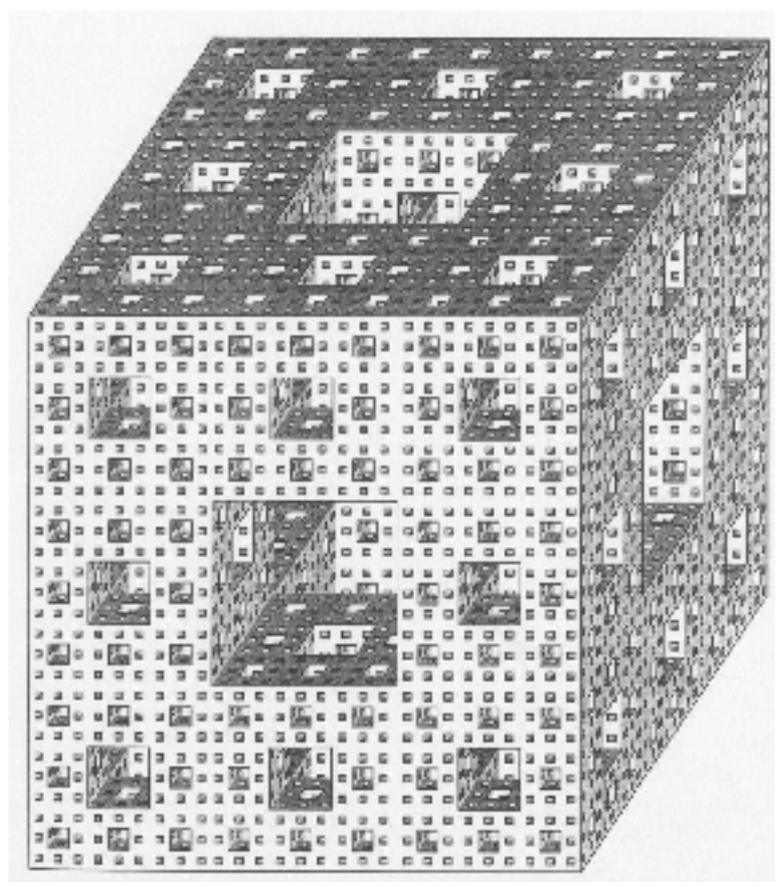


Abbildung 3.1: Menger-Schwamm (Karl Menger 1902 - 1985)

*Das Volumen*

Würfel Inhalt	Anzahl
$V_0$	1
$\frac{1}{27}V_0$	$27 - 7 = 20$
$\frac{1}{27^2}V_0$	$20^2$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{1}{27^n}$	$20^n$

mit  $V_0 = a^3$

$$V_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} V_0 \left( \frac{20}{27} \right)^n = 0$$

*Die Oberfläche*

Beim Start haben wir die Oberfläche  $F_0 = 6a^2$ . Nach der ersten Iteration bleiben 20 Würfel übrig. Hätten sie keine gemeinsamen Flächen, so gäbe es insgesamt  $20 \cdot 6$  Quadrate des Inhalts  $\frac{1}{9}a^2$ . Das sind aber zuviele. Die 12 Kantenwürfel haben mit den anderen Würfeln je zwei Quadrate und die 8 Eckenwürfel je drei gemeinsam. Dies bedeutet  $F_1 = (20 \cdot 6 - 48)\frac{1}{9}a^2$ .

Nach der zweiten Iteration bleiben noch  $20^2$  Würfel übrig. Hätten sie keine gemeinsamen Flächen, so gäbe es insgesamt  $20^2 \cdot 6$  Quadrate, jedes mit Inhalt  $\frac{1}{9^2}a^2$ . Das sind zuviele. Im Inneren eines einzigen Würfels der Kante  $\frac{1}{3}a$  müssen 48, also  $20 \cdot 48$  Flächen abgezogen werden. Nun haben aber diese Würfel selber Quadrate der Kante  $\frac{1}{9}a$  gemeinsam und zwar  $8 \cdot 48$ . Dies bedeutet  $F_2 = (20^2 \cdot 6 - 20 \cdot 48 - 8 \cdot 48)\frac{1}{9^2}a^2$ .

*Mit vollständiger Induktion ergibt sich*

$$\begin{aligned} F_n &= [20^n \cdot 6 - 48(20^{n-1} + 20^{n-2} \cdot 8 + \dots + 8^{n-1})]\frac{1}{9^n}a^2 = \\ &= 20^{n-1}[120 - 48(1 + \frac{8}{20} + \dots + (\frac{8}{20})^{n-1})]\frac{1}{9^n}a^2 = \\ &= \frac{1}{9} \cdot (\frac{20}{9})^{n-1}a^2[120 - 48 \cdot \frac{5}{3}(1 - (\frac{2}{5})^n)] = \\ &= \frac{1}{9}(\frac{20}{9})^{n-1}a^2[40 + 80(\frac{2}{5})^n]. \end{aligned}$$

So erhalten wir

$$F_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \infty$$

## 3.2 Physiologische Flächen

**Definition 3** *Motivation: Forscher aus der Anatomie suchen nach Modellen zur mathematischen Beschreibung von Lungen oder Nieren. Dabei stellen sie 4 Forderungen:*

1. Die Flächenmaßzahl  $F_\infty$  soll unendlich groß sein.
2. Die Fläche soll in eine Grenzfläche (geschlossen & endlich) eingebettet sein. Diese Grenze wird erreicht aber nicht überschritten.
3. Der Grenzkörper und das Flächenfraktal besitzen die selbe Volumenmaßzahl.
4. Die Fläche soll fraktal sein. (Ungerade Dimension)

Flächen, die diese 4 Bedingungen erfüllen, heissen *physiologisch*.

### 3.3 Erstes Würfelfraktal

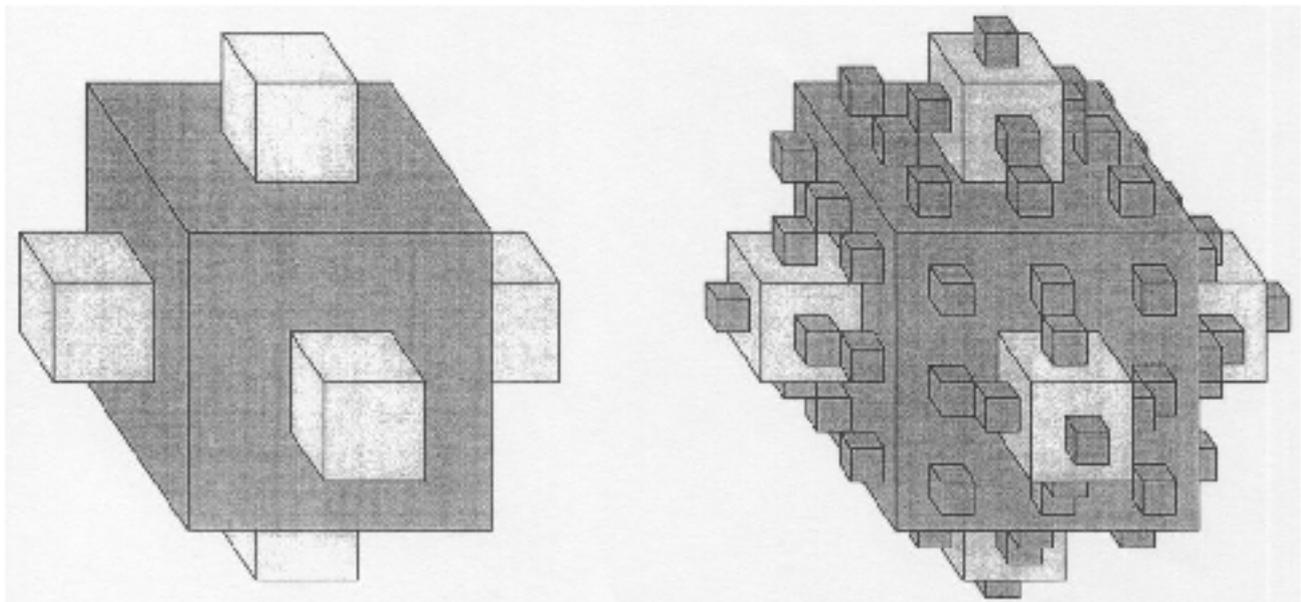


Abbildung 3.2: Erstes Würfelfraktal

#### *Eigenschaften*

- Der Flächeninhalt  $F_\infty$  des W-Fraktals ist  $\infty$
- Das Volumen  $V_\infty$  des W-Fraktals beträgt  $\frac{10}{7}a^3$
- Das W-Fraktal ist in ein Rhombendodekaeder eingebettet mit dem Inhalt  $V_G = a^3 + 6(\frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{1}{2}a) = 2a^3$
- Das W-Fraktal ist selbstähnlich mit  $N = 13$  und  $p = 3$

$$d_S = \frac{\log(13)}{\log(3)} \approx 2,3347$$

### 3.4 Zweites Würfelfraktal

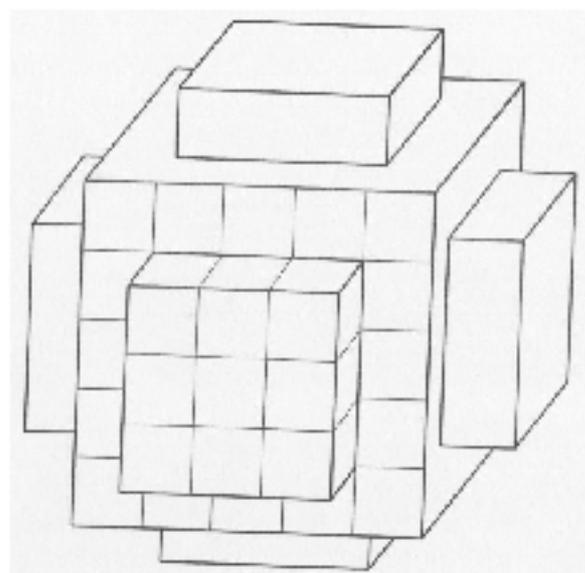


Abbildung 3.3: Zweites Würfelfraktal

#### *Eigenschaften*

- Der Flächeninhalt  $F_\infty$  des W-Fraktals ist  $\infty$
- Das Volumen  $V_\infty$  des W-Fraktals beträgt  $\frac{71}{44}a^3$
- Das W-Fraktal ist in ein gestutztes Rhombendodekaeder eingebettet mit dem Inhalt  $V_G = \frac{15}{8}a^3$
- Das W-Fraktal ist selbstähnlich mit  $N = 37$  und  $p = 5$

$$d_S = \frac{\log(37)}{\log(5)} \approx 2,243$$

*Fazit:* Beide Würfelfraktale sind nicht physiologisch, denn das erste Fraktal füllt den Grenzkörper nur zu 71% aus und das andere zu 86%

### 3.5 Weitere Fraktale und höhere Dimensionen

Das Tetraeder-Fraktal und das Oktaeder-Fraktal sind physiologisch, wohingegen die bisherigen Verfahren bei Ikosaeder- und Dodekaeder-Fraktalen nicht klappen. In Dimension 4 und höher lassen sich Würfel-Fraktale völlig analog zu den bisherigen Verfahren konstruieren und berechnen. Andere Polyeder hingegen scheitern daran, dass sie sich nicht mehr in kongruente Teilflächen zerlegen lassen. Eventuell müsste man dann neue Verfahren konstruieren.

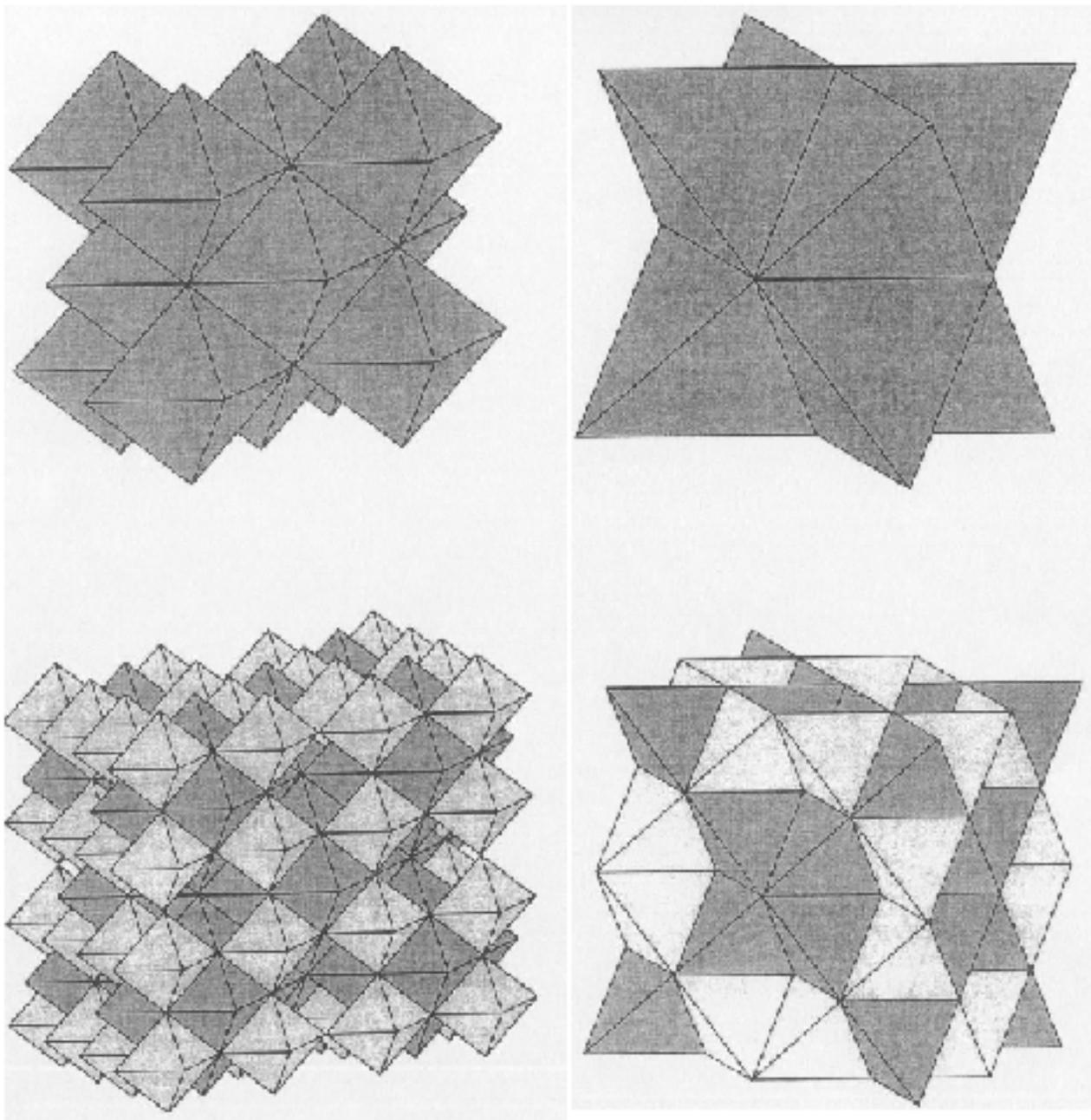


Abbildung 3.4: Oktaeder-Fraktal und Tetraeder-Fraktal



## Kapitel 4

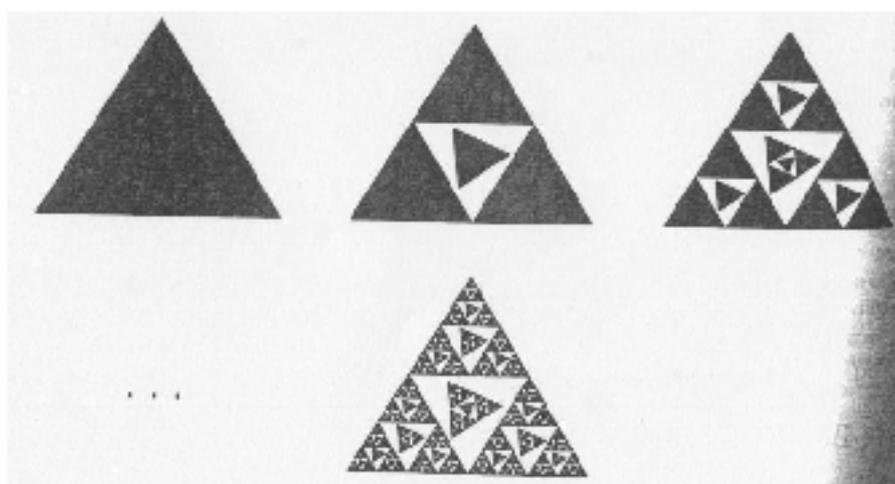
### Selbstähnlichkeit im weiteren Sinn

**Definition 4** Gegeben sei eine kompakte Punktmenge  $G$  in einem metrischen Raum. Sie werde in  $N > 1$ , bis auf Randelemente paarweise disjunkte, kongruente Teilmengen  $G_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  zerlegt, also  $G = \cup_{i=1}^N G_i$ . Wenn es dann für alle  $i$  eine Ähnlichkeitsabbildung  $\gamma_i$  mit  $\gamma_i(G_i) = G$  gibt, dann heisst  $G$  selbstähnlich im weiteren Sinn. Die Ähnlichkeitsfaktoren seien  $p_i$  und es gelte  $p_i > 1$ .

Worin besteht der Unterschied zur Definition „im strengen Sinn“?

In der vorigen Definition gab es eine einzige Ähnlichkeitsabbildung und die Teilmengen  $G_i$  waren paarweise kongruent. Jetzt existieren verschiedene Ähnlichkeitsabbildungen und die Teilmengen  $G_i$  sind nicht kongruent.

**Beispiel 7** Sierpinski-Dreieck mit Variationen

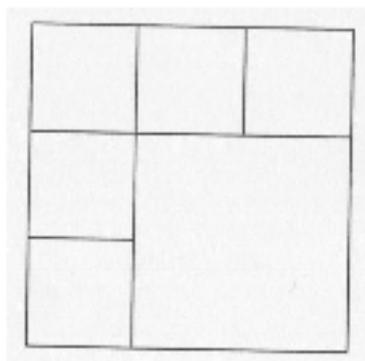


## 4.1 Ein „neuer“ Dimensionsbegriff

Der bisherige Dimensionsbegriff galt nur für Punktmengen die selbstähnlich im strengen Sinn waren. Wir benötigen also eine Erweiterung.

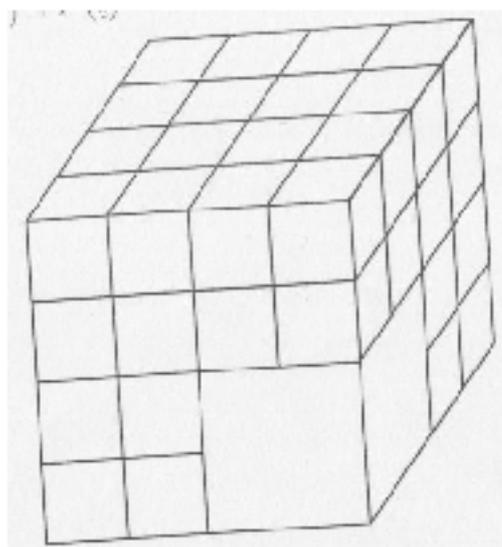
Wir definieren:  $d_S = \frac{\log(N)}{\log(p)}$  oder  $N = p^{d_S}$  also  $N \cdot q^{d_S} = 1$  mit  $q = \frac{1}{p} < 1$

Stellen wir doch einmal folgende Beobachtungen an:



$$N_1 = 5, p_1 = 3, q_1 = \frac{1}{3}, N_2 = 1, p_2 = \frac{3}{2}, q_2 = \frac{2}{3}, N = N_1 + N_2 = 6$$

$$N_1 q_1^2 + N_2 q_2^2 = 5\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$$



$$N_1 q_1^3 + N_2 q_2^3 = 56\left(\frac{1}{4}\right)^3 + 1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1$$

### Definition 5 $\overline{d}_S$

Punktmengen  $G$ , die im weiteren Sinne selbstähnlich sind mit  $N_i$  und  $p_i > 1$ , sowie  $N = \sum N_i$  besitzen die Dimension  $\overline{d}_S$ , wobei  $\sum N_i \cdot (q_i)^{\overline{d}_S} = 1$ .

Existenz von  $\overline{d}_S$

$$N_i \cdot (q_i)^x = \underbrace{(q_i)^x + (q_i)^x + \dots + (q_i)^x}_{N_i \text{ Summanden}} = \sum_{i=1}^N q_i^x$$

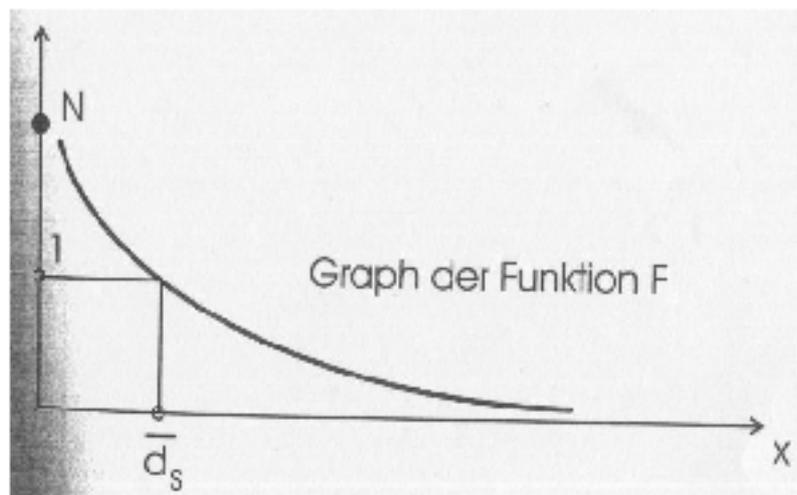
Betrachte die Funktion

$$F : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$x \rightarrow \sum_{i=1}^N q_i^x$$

mit den Eigenschaften

- $F(x)$  ist stetig, weil  $q_i^x$  stetig ist.
- $F(x) > 0$  weil  $x \in \mathbb{R}_0^+$  und  $q_i > 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$ , weil  $0 < q_i < 1$  also  $\lim_{x \rightarrow \infty} q_i^x = 0$
- $F(0) = N > 1$ , weil  $q_i^0 = 1$
- $F'(x) = \sum_{i=1}^N q_i^x \cdot \log(q_i) < 0$  denn  $q_i^x > 0$  und  $\log(q_i) < 0$  wegen  $0 < q_i < 1$



$F$  ist streng monoton fallend und mit dem Zwischenwertsatz folgt, dass der Wert 1 genau einmal angenommen wird.

$\overline{d}_S$  lässt sich oft nur numerisch bestimmen.



# Kapitel 5

## Selbstaffinität

### 5.1 Die Barnsley-Maschine

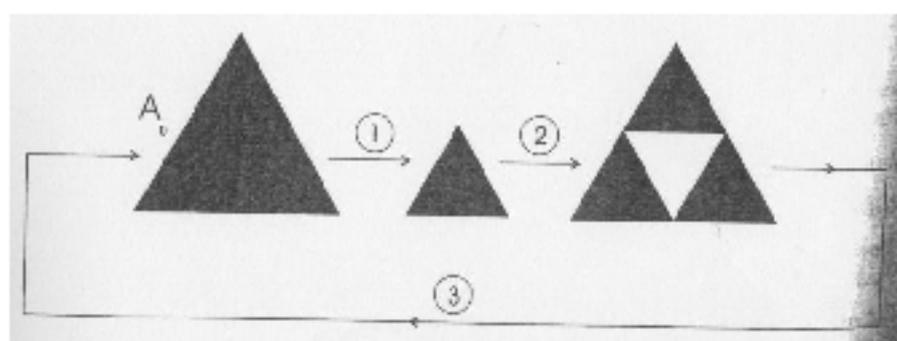


Abbildung 5.1: Michael Barnsley

Die Barnsley-Maschine betrachtet einen anderen Ansatz bei der Erzeugung von Fraktalen. Bisher haben wir Fraktale durch „wegwischen“ generiert. Die Maschine erschafft Fraktale durch 3 Arbeitgänge, nämlich durch Verkleinern, Kopieren & Anordnen, Iterieren.

Mit Hilfe des Computers lässt sich diese Maschine sehr leicht realisieren, denn die 3 Arbeitgänge lassen sich durch affine Abbildungen beschreiben:

$$\beta : x' = Ax + t$$

Es genügt dann einen solchen IFS-Code (Iteriertes Funktionen System) vorliegen zu haben:

	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{21}$	$a_{22}$	$t_1$	$t_2$
$\beta_1$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0
$\beta_2$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
$\beta_3$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
$\beta_4$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$

Abbildung 5.2: Tabelle mit IFS-Code

**Definition 6** Gegeben sei eine kompakte Punktmenge  $G$  in einem metrischen Raum. Sie werde in  $N > 1$ , bis auf Randelemente paarweise disjunkte, kongruente Teilmengen  $G_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  zerlegt, also  $G = \cup_{i=1}^N G_i$ . Wenn es dann für alle  $i$  affine Abbildungen  $\gamma_i$  mit  $\gamma_i(G_i) = G$  gibt, dann heisst  $G$  selbstaffin.

Ein Beispiel für die Anwendung des IFS-Codes ist das Farnblatt von Michael Barnsley:

	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{21}$	$a_{22}$	$t_1$	$t_2$
$\beta_1$	0	0	0	0.16	0.45	-0.09
$\beta_2$	0.85	0.04	-0.04	0.85	0.07	0.16
$\beta_3$	0.2	-0.23	0.23	0.2	0.35	0.04
$\beta_4$	-0.15	0.28	0.25	0.24	0.52	0.08

Abbildung 5.3: IFS-Code für das Farnblatt

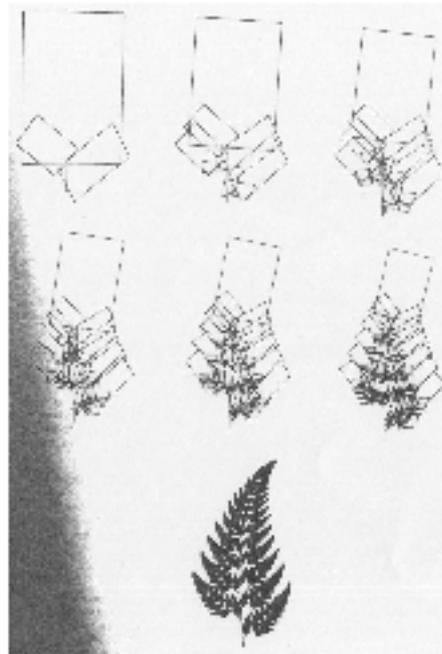


Abbildung 5.4: Durch IFS-Code erzeugter Farn

## 5.2 Verwendung von IFS-Codes

- Verwendung als Bildkompression
- Schaffung neuer, vorallem naturähnlicher Gebilde durch probieren
- Erschaffung von Kulissen in Hollywood
- Schaffung von ästhetischen Kunstwerken durch Künstler
- Sehr wirtschaftlich, kleiner Speicherbedarf im Vergleich zum Fernsehbild mit etwa 500 000 Pixeln.

Barnsley:

- Interesse am codieren von beliebigen Bildern mit Hilfe von affinen Transformationen
- Ließ sich solche Verfahren patentieren und nutzt sie kommerziell. Als Folge gibt es dazu kaum wissenschaftliche Publikationen.



# Literaturverzeichnis

- [1] Fraktale Geometrie - eine Einführung. H. Zeitler, D. Pagon. Vieweg, 2000.
- [2] Chaos and Fraktals. New frontiers of science. H.-O. Pleitgen, H. Jürgens, D. Saupe. Second Edition, Springer, 2004.