Selbstähnliche und selbstaffine Mengen

Mathias Göppel*

22. Januar 2007

1 Einführung

Diese Ausarbeitung ist um Rahmen des Seminars ,,Fraktale Geometrie” an der Uni Ulm entstanden. Als Grundlage diente das Buch ,,Fractal Geometry” von Falconer und Kenneth [1].

2 Iterierte Funktionensysteme

Viele Fraktale sind aus Teilen zusammengesetzt, die dem Ganzen auf eine gewisse Art ähnlich sind. Diese Selbstähnlichkeit ist nicht nur eine einfache Eigenschaft vieler Fraktale, sie kann auch umgekehrt dazu benutzt werden eine bestimmte Klasse von Fraktalen zu definieren.
Der folgende Begriff des *Iteriertes Funktionensystems* ist die formale Beschreibung dieser Art von Selbstähnlichkeit und stellt uns, wie wir später sehen werden, eine einfache Möglichkeit zur Berechnung der Dimensionen, der so definierten Mengen bereit.

Definition 2.1:
Sei D eine geschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $S : D \to D$ heisst *Kontraktion*, falls es eine Konstante c mit $0 < c < 1$ derart gibt, dass $|S(x) - S(y)| \leq c|x - y|$ für alle $x, y \in D$ gilt.
Falls $|S(x) - S(y)| = c|x - y|$ gilt, so bildet S Mengen auf geometrisch ähnliche Mengen ab, und heisst dann *Kontraktionsähnlichkeit*. c wird dann auch *Skalierungsfaktor* genannt.

Definition 2.2:
Eine endliche Familie von Kontraktionen $\{S_1, ..., S_m\}$, mit $m \geq 2$, heisst *Iteriertes Funktionensystem* oder *IFS*. Eine kompakte Teilmenge F von D heisst *Attraktor* oder *invariante Menge* für ein IFS, falls

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F).$$

*mathias.goeppel@uni-ulm.de

Bemerkung 1:
zu den beiden vorrangehenden Definitionen.

- Aus der Definition einer Kontraktion folgt unmittelbar deren Stetigkeit.
- Die wesentliche Eigenschaft eines IFS ist, dass es einen eindeutigen Attraktor beschreibt, der normalerweise fraktal ist. (siehe 2.1)

Zum Beispiel lässt sich die Kantormenge nun als Attraktor des IFS, das durch die beiden Kontraktionen

$$S_1(x) = \frac{1}{3}x \textit{ und } S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

beschrieben ist, auffassen.

Im folgenden soll gezeigt werden, dass jedes IFS eine eindeutige nicht-leere, kompakte Attraktormenge besitzt. Dies würde dann bedeuten, dass wir eine neue, eindeutige Definition mittels des genannten IFS liefern könnten.

Bevor wir damit beginnen noch einige einfache Definitionen.

Definition 2.3:
Sei A eine Teilmenge eines metrischen Raumes D. Die *δ-Umgebung von A* ist definiert als:

$$A_\delta := \inf\{x \in D : |x - a| \leq \delta \textit{ und } a \in A\}$$

Definition 2.4:
Sei $\mathcal{S}$ das Mengesystem aller nicht-leeren, kompakten Teilmengen eines metrischen Raums. Die *Hausdorffmetrik auf $\mathcal{S}$* d ist dann wie folgt definiert.

$$d(A, B) := \inf\{\delta : A \subset B_\delta \textit{ und } B \subset A_\delta\}$$

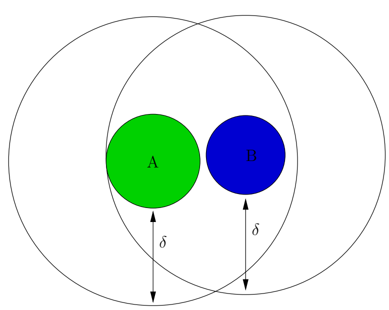

Abbildung 1: Veranschaulichung die Hausdorffmetrik

Es ist leicht zu sehen, dass d eine Metrik ist. Für das nächste Theorem, das die fundamentalen Ergebnisse von IFS zusammenfasst, werden zwei Beweise angeführt. Der erste benutzt den Banach'schen Fixpunktsatz A.1, wohingegen der zweite auf elementarer Ebene geführt wird.

Theorem 2.1. *Betrachten wir das IFS, gegeben mittels der Kontraktionen* $\{S_1, ..., S_m\}$ *auf* $D \subset \mathbb{R}^n$*, so dass*

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i|x - y| \tag{1}$$

mit $x, y \in D$ *und* $c_i < 1$ *für alle* i*. Dann existiert ein eindeutiger Attraktor* F*, d.h. eine nicht-leere kompakte Menge, so dass*

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F). \tag{2}$$

Definieren wir ferner eine Abbildung S *auf der Klasse* $\mathcal{S}$ *der nicht-leeren, kompakten Mengen wie folgt:*

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E). \tag{3}$$

mit $E \in \mathcal{S}$ *und schreiben* S^k *für die* k*-te Iteration von* S *(also* $S^0(E) = E$ *und* $S^k(E) = S(S^{k-1}(E))$ *für* $k \geq 1$*), dann gilt*

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E) \tag{4}$$

für jede Menge $E \in \mathcal{S}$ *mit* $S_i(E) \subset E$ *für alle* i*.*

Beweis. Die Mengen aus $\mathcal{S}$ werden durch S wieder auf Mengen aus $\mathcal{S}$ abgebildet. Für $A, B \in \mathcal{S}$ gilt

$$d(S(A), S(B)) = d\left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i(A), \bigcup_{i=1}^{m} S_i(B)\right) \leq \max_{1 \leq i \leq m} d(S_i(A), S_i(B)).$$

Dies resultiert aus der Definition der Hausdorff'schen Metrik d und der Tatsache, dass falls die δ-Umgebung $(S_i(A))_\delta$ $S_i(B)$ für alle i enthält, dass dann auch $(\bigcup_{i=1}^{m} S_i(A))_\delta$ $\bigcup_{i=1}^{m} S_i(B)$ enthält, sowie umgekehrt. Mit 1 folgt dann:

$$d(S(A), S(B)) \leq (\max_{1 \leq i \leq m} c_i) d(A, B). \tag{5}$$

Man kann zeigen, dass d eine Metrik auf dem vollständigen Raum $\mathcal{S}$ ist, d.h. jede Cauchy-Folge von Mengen aus $\mathcal{S}$ konvergiert zu einer Menge aus $\mathcal{S}$. Dass dies gilt kann in [3][Korollar 1.2.2, S. 16.] nachgelesen werden. Da $0 < \max_{1 \leq i \leq m} c_i < 1$ geht aus (5) hervor, dass S eine Kontraktion auf dem vollständigen metrischen Raum $(\mathcal{S}, d)$ ist. Mit dem Banach'schen Kontraktionstheorem (A.1) folgt dann, dass $\mathcal{S}$ einen eindeutigen Fixpunkt hat, d.h. es existiert eine eindeutige Menge $F \in \mathcal{S}$, so dass $S(F) = F$, also wie in (2). Ferner gilt $S^k(E) \to F$ für $k \to \infty$. Genauer, falls $S_i(E) \subset E$ für alle i, dann gilt auch $S(E) \subset E$ und damit ist $S^k(E)$ eine fallende Folge von nicht-leeren kompakten Mengen, von denen jede F in $\bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$ schneideed. □

Beweis. Sei E eine beliebige Menge aus $\mathcal{S}$, so dass $S_i(E) \subset E$ für alle i, z.B. $E = D \cap B(0, r)$ für ein r das gross genug ist. Dann ist $S^k(E) \subset S^{k-1}(E)$, und damit ist $S^k(E)$ eine fallende Folge von nicht-leeren kompakten Mengen, die notwendigerweise einen nicht-leeren Schnitt $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$ haben. Da $S^k(E)$ eine fallende Folge von Mengen ist, folgt, dass $S(F) = F$ gilt, damit erfüllt also (2) und ist Attraktor des IFS.
Um die Eindeutigkeit des Attraktors zu zeigen, leiten wir (5) auf die gleiche Weise wie im ersten Beweis her. Angenommen A und B seien beide Attraktoren des IFS, d.h. $S(A) = A$ und $S(B) = B$. Da $0 < \max_{1\leq i\leq m} c_i < 1$ folgt mit (5), dass $d(A, B) = 0$ und damit auch $A = B$. □

Mit dem Begriff des Iterierten Funktionensystems haben wir jedoch zwei neue Probleme aufgeworfen. Was kennzeichnet den Attraktor eines IFS und wie kann dieser dargestellt werden? Um eine Antwort auf diese Fragen zu finden wird es unvermeidlich sein die Struktur und Dimension der Attraktoren genauer zu betrachten. Wie wir sehen werden, wird uns hierbei die Definition des IFS eine grosse Hilfe sein.
Oft kann aus einfacher Betrachtung ein IFS so konstruiert werden, dass es eine vorgegebe Menge als Attraktor besitzt. So ist der Attraktor des IFS

$$S_1(x, y) = (\frac{1}{4}x, \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}) \quad , \quad S_2(x, y) = (\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}, \frac{1}{4}y)$$
$$S_3(x, y) = (\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}) \quad , \quad S_4(x, y) = (\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}, \frac{1}{4}y + \frac{1}{4})$$

offensichtlich der Kantorstaub. Allgemein kann jedoch nicht zu jeder Menge ein IFS konstruiert werden, welches diese Menge als Attraktor besitzt. Oft ist es allerdings möglich die Menge zu approximieren. Auf diese Frage soll in Abschnitt (6) noch genauer eingegangen werden.

Die in 2.1 eingeführte Abbildung S ist der Schlüssel zur Berechnung des Attraktors eines IFS. Gleichung (4) stellt uns sogar schon eine Art Algorithmus bereit dies zu tun. Wir wissen sogar, dass die Iterationen $S^k(E)$ für jedes beliebige Menge $E \in \mathcal{S}$ gegen den selben Attraktor F konvergiert, also $d(S^k(E), F) \to 0$. Dies folgt, da aus (4) folgt, dass $d(S(E), F) = d(S(E), S(F)) \leq (\max_{1\leq i\leq m} c_i) d(E, F)$ und damit auch $d(S^k(E), F) \leq (\max_{1\leq i\leq m} c_i)^k d(E, F)$ gilt. Damit ist die Folge $S^k(E)$ eine Folge ,,besser werdender" Approximationen für F. Falls F fraktal ist werden seine endlichen Vorstufen auch als *Präfraktale* bezeichnet.

Für alle k gilt:

$$S^k(E) = \bigcup_{\mathcal{I}_k} S_{i_1} \circ ... \circ S_{i_k}(E)$$

wobei $\mathcal{I}_k$ die Menge alles k-term Folgen $(i_1, ..., i_k)$ mit $1 \leq i_j \leq m$ ist. Sei x ein Punkt aus F. Falls $S_i(E) \subset E$ ist, dann folgt aus (4), dass eine (nicht zwingend eindeutige) Folge $(i_1, i_2, ...)$ existiert, so dass $x \in S_{i_1} \circ ... \circ S_{i_k}(E)$ für ein beliebiges k gilt. Diese Folge gibt uns nun also die Möglichkeit x als

$$x = x_{i_1,i_2,...} := \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{i_1} \circ ... \circ S_{i_k}(E)$$

zu schreiben. Und damit $F = \bigcup\{x_{i_1,i_2,...}\}$.
Der Ausdruck $x_{i_1,i_2,...}$ ist unabhängig von E, falls für alle i gilt, dass $S_i(E) \subset E$.

Beispiel:
Sei F die Kantormenge, beschrieben mittels des Attraktors des IFS $S_1(x) = \frac{1}{3}$, $S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. Falls $E = [0,1]$, dann ist $S^k(E) = E_k$ eine Menge, bestehend aus 2^k Intervallen der Länge 3^{-k}. Ein Punkt $x_{i_1,i_2,...}$ der Kantormenge ist gerade gleich der Zahl $0, a_1 a_2 ...$ im Dreiersystem mit

$$a_k = \begin{cases} 0, \ falls \ i_k = 1 \\ 2, \ falls \ i_k = 2 \end{cases} .$$

Darüber hinausgehend ist zu bemerken, dass falls die Vereinigung in (2) disjunkt ist, und die S_i injektive Abbildungen sind, F total unzuhammenhängend ist. Dies gilt, da, falls $(x_{i_1,i_2,...}) \neq (x_{i'_1,i'_2,...})$ ist, dann kann ein k gefunden werden, so dass, $(i_1, ..., i_k) \neq (i'_1, ..., i'_k)$. Daraus folgt, dass die disjunkten, abgeschlossenen Mengen $S_{i_1} \circ ... \circ S_{i_k}(F)$ und $S_{i'_1} \circ ... \circ S_{i'_k}(F)$ jeweils einen der beiden Punkte enthalten, aber nicht mehr zusammenhängend sind.

Aus dieser Überlegung leiten sich leicht zwei Algorithmen ab, um mit dem Computer planare Attraktoren zu veranschaulichen.
Bei der ersten Methode wählt man irgendeine initiale Menge E (zum Beispiel ein Quadrat) und malt die k-te Approximatian $S^k(E)$ für F für ein k das groß genug gewählt ist. Das Mengensystem $S^k(E)$ besteht aus m^k Mengen, die entweder komplett dargestellt werden, oder man stellt nur einen representativen Punkt aus jeder Menge dar. Falls E als eine Strecke dargestellt werden kann und $S_1(E), ..., S_m(E)$ diese Menge an eine polynomiale Kurve mit den selben Endpunkten wie die von E annähert, dann ist die Folge $S^k(E)$ von polynomialen Kurven eine immer besser werdende Approximation für F.
Für die zweite Methode wählt man einen beliebigen Punkt x_0 und wählt zufällig eine Kontraktion S_{i_1} aus $S_1, ..., S_m$ und setzt $x_1 = S_{i_1}(x_0)$. Fährt man auf diese Weise fort, wählt also in jedem Schritt ein S_{i_k} aus $S_1, ..., S_m$ zufällig aus und setzt $x_1 = S_{i_k}(x_{k-1})$, dann sind die Punkte x_k so zufällig über F verteilt, das man F damit so gut es eine bestimmte Auflösung eben zulässt darstellen kann. k hängt dabei von der gewünschten Auflösung ab.

3 Selbstähnliche Mengen

Einer der großen Vorteile, wenn man Fraktale mit Hilfe von IFS definiert, ist, dass man die Dimension der fraktalen Menge oft relativ leicht berechnen kann. In diesem Abschnitt soll der Fall, dass $S_1, ..., S_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Kontraktionsähnlichkeiten sind, behandelt werden. D.h. es gilt für alle i

$$|S_i(x) - S_i(y)| = c_i|x - y|, \tag{6}$$

mit $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $0 < c_i < 1$. Diese Abbildungen bilden also Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ auf geometrisch ähnliche Mengen ab. Der Attraktor eines solchen IFS heisst dann *selbstähnliche Menge*. Wir werden zeigen, dass unter bestimmten Vorraussetzung die Hausdorff- und Boxdimension einer selbstähnlichen Menge F gleich dem Wert s ist, der

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1 \tag{7}$$

erfüllt, und dass $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ gilt. Falls $F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$ eine Vereinigung von ,,fast disjunkten" Mengen ist, dann gilt mit (6) und der Skalierungseigenschaft der Hausforfdimension

$$\mathcal{H}^s(F) = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{H}^s(S_i(F)) = \sum_{i=1}^{m} c_i \mathcal{H}^s(F).$$

Unter der Annahme, dass $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ gilt, folgt damit auch, dass (7) erfüllt ist.
Um so argumentieren zu dürfen, muss nun noch geklärt werden was ,,fast disjunkt" bedeutet. Es muss dafür garantiert werden, dass sich die Mengen $S_i(F)$ nicht zu stark überlappen.

Definition 3.1:
Gegeben ein IFS mit $S_1, ..., S_m$. Man sagt, die S_i erfüllen die *Bedingung für offene Mengen*, falls eine nicht-leere, beschränkte, offene Menge V existiert, so dass

$$V \supset \bigcup_{i=1}^{m} S_i(V)$$

eine disjunkte Vereinigung der $S_i(V)$ ist.

Wir werden zeigen, dass falls unsere S_i diese Bedingung erfüllen, dass die Hausdorffdimension des Attraktors gerade die Lösung der Gleichung (7) ist.

Um den Beweis dieser Behauptungen führen zu können brauchen wir noch das folgende geometrische Resultat.

Lemma 3.1. *Sei $\{V_i\}$ ein Mengensystem disjunkter, offener Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, so dass jedes V_i eine Kugel mit dem Radius $a_1 r$ beinhaltet und andereseits von einer Kugel mit Radius $a_2 r$ eingeschlossen wird. Dann schneidet jede Kugel B mit Radius r höchstens $(1 + 2a_2)^n a_1^{-n}$ der abgeschlossenen Mengen $\overline{V_i}$*

Beweis. Falls $\overline{V_i}$ B schneidet, dann beinhaltet die Kugel mit gleichem Mittelpunkt wie B und Radius $(1+2a_2)r$ $\overline{V_i}$. Angenommen, dass q der Mengen aus $\overline{V_i}$

B schneiden, dann folgt aus der Aufsummierung der Volumina der eingeschlossenen Kugeln mit den Radien $a_1 r$, dass

$$\begin{aligned} & q\frac{\pi^{n/2}(a_1 r)^n}{\Gamma(n/2+1)} \leq \frac{\pi^{n/2}(1+2a_2)^n r^n}{\Gamma(n/2+1)} \\ \Leftrightarrow \quad & q(a_1 r)^n \leq (1+2a_2)^n r^n, \end{aligned}$$

woraus die behauptete Schranke für q folgt. $\square$

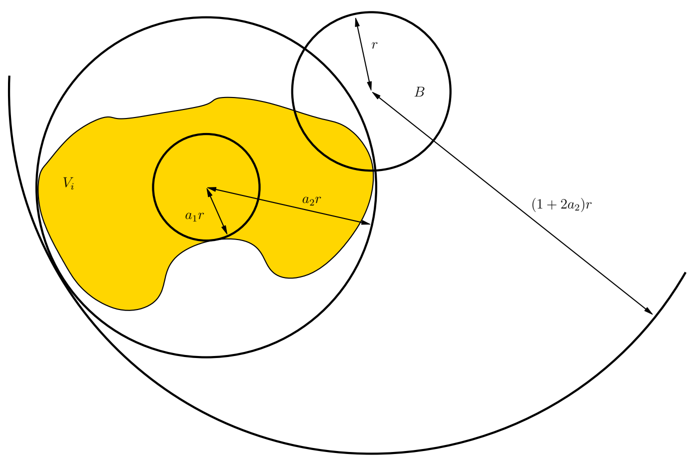

Abbildung 2: Veranschaulichung des Beweises von (3.1) für ein V_i

Theorem 3.2. *Vorrausgesetzt die Bedingung für offene Mengen (3.1) gilt für die Kontraktionsähnlichkeiten S_i auf $\mathbb{R}^n$ mit den Skalierungsfaktoren $0 < c_i < 1$ für $1 \leq i \leq m$. Falls F der Attraktor des IFS $\{S_1, ..., S_m\}$ ist, d.h.*

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F), \tag{8}$$

dann ist $dim_H F = dim_B F = s$, wobei s durch die Lösung der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1 \tag{9}$$

gegeben ist. Ferner gilt für dieses s, $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

Beweis. Angenommen s erfüllt (9). Sei $\mathcal{I}_k$ die Indexmenge aller k-Tupel $(i_1, ..., i_k)$ der Länge k mit $1 \leq i_j \leq m$. Für eine beliebige Menge A und $(i_1, ..., i_k) \in \mathcal{I}_k$ schreiben wir abkürzend $A_{i_1,...,i_k} = S_{i_1} \circ ... \circ S_{i_k}(A)$. Indem wir nun (8) wiederholt anwenden, können wir damit

$$F = \bigcup_{\mathcal{I}_k} F_{i_1,...,i_k}$$

schreiben. Nun soll gezeigt werden, dass diese Überdeckung eine geeignete obere Schranke für das Hausdorffmass von F darstellt. Da die Abbildung $S_{i_1} \circ ... \circ S_{i_k}$ eine Kontraktionsähnlichkeit mit dem Skalierungsfaktor $c_{i_1} \cdots c_{i_k}$ ist gilt nach (9)

$$\sum_{\mathcal{I}_k} |F_{i_1,...,i_k}|^s = \sum_{\mathcal{I}_k} (c_{i_1},...,c_{i_k})^s |F|^s \tag{10}$$

$$= \left(\sum_{i_1} c_{i_1}^s\right) \cdots \left(\sum_{i_k} c_{i_k}^s\right) |F|^s \tag{11}$$

$$= |F|^s \tag{12}$$

Für ein beliebiges $\delta > 0$ können wir ein k derart wählen, dass $|F_{i_1,...,i_k}| \leq (\max_i c_i)^k |F| \leq \delta$. Daraus folgt $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq |F|^s$ und damit $\mathcal{H}^s(F) \leq |F|^s$.

Die untere Schranke ist schwieriger zu zeigen. Sei $\mathcal{I}$ die Menge aller Folgen $\mathcal{I} = \{(i_1, i_2, ...) : 1 \leq i_j \leq m\}$, und sei $I_{i_1,...,i_k} = \{(i_1, ..., i_k, q_{k+1}, ...) : 1 \leq i_j \leq m, 1 \leq q_j \leq m\}$ der ,,Zylinder" bestehend aus denjenigen Tupeln aus $\mathcal{I}$, die mit $(i_1, ..., i_k)$ beginnen. Wir können nun eine Verteilung μ auf $\mathcal{I}$ so definieren, dass $\mu(I_{i_1,...,i_k}) = (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s$ ist. Da $(c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s = \sum_{i=1}^m (c_{i_1} \cdots c_{i_k} c_i)^s$ gilt, d.h. $\mu(I_{i_1,...,i_k}) = \sum_{i=1}^m \mu(I_{i_1,...,i_k,i})$, folgt, dass μ eine normierte Verteilung auf Mengen aus $\mathcal{I}$ ist, also $\mu(\mathcal{I}) = 1$. Diese Verteilung kann leicht in eine neue Verteiling $\tilde{\mu}$ auf F umgewandelt werden indem wir $\tilde{\mu}(A) = \mu\{(i_1, i_2, ...) : x_{i_1,i_2,...} \in A\}$ für alle Teilmengen A aus F definieren. (zur Erinnerung $x_{i_1,i_2,...} = \bigcap_{k=1}^\infty F_{i_1,...,i_k}$) Die $\tilde{\mu}$-Masse einer Menge ist also die μ-Masse der korrespondierenden Folgen. Es ist leicht zu sehen, dass $\tilde{\mu}(F) = 1$.

Nun soll gezeigt werden, dass $\tilde{\mu}$ die Bedingungen des Prinzips für Massenverteilungen B erfüllt. Dazu müsste in einem ersten Schritt gezeigt werden, dass μ und damit auch $\tilde{\mu}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Darauf soll jedoch an dieser Stell verzichtet werden.
Sei V die offene Menge aus (2). Da $\overline{V} \supset S(\overline{V}) = \bigcup_{i=1}^m S_i(V)$, konvergient die fallende Folge $S^k(\overline{V}$ zu F (siehe 4). Ferner gilt $\overline{V} \supset F$ und $\overline{V}_{i_1,...,i_k} \supset F_{i_1,...,i_k}$ für jedes k-Tupel $(i_1, ..., i_k)$. Sei B eine beliebige Kugel mit Radius $r < 1$. Wir schätzen $\tilde{\mu}(B)$ unter Zuhilfenahme der Mengen $V_{i_1,...,i_k}$ mit vergleichbaren Durchmessern zu dem von B und mit dem Schnitt des Abschluss $F \cap B$ ab.

Wir schneiden jede Folge $(i_1, i_2, ...) \in \mathcal{I}$ nach dem ersten Verkommen von i_k, für das

$$\left(\min_{1 \leq i \leq m} c_i\right) r \leq c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k} \leq r \tag{13}$$

gilt, ab. Weiterhin sei $\mathcal{Q}$ die endliche Menge aller Tupel, die aus dieser Konstruktion resultieren. Dann gibt es für jede Folge $(i_1, i_2, ...) \in \mathcal{I}$ genau ein Wert für k, so dass $(i_1, ..., i_k) \in \mathcal{Q}$. Da $V_1, ..., V_m$ disjunkt sind, sind auch $V_{i_1,...,i_k,1}, ..., V_{i_1,...,i_k,m}$ für alle $(i_1, ..., i_k)$ disjunkt. Wird diese Beobachtung nun rekursiv auf sich selbst angewandt, so ergibt sich, dass auch das Mengensystem der offenen Mengen $\{V_{i_1,...,i_k} : (i_1, ..., i_k) \in \mathcal{Q}\}$ auch disjunkt ist. Analog $F \subset \bigcup_{\mathcal{Q}} F_{i_1,...,i_k} \subset \bigcup_{\mathcal{Q}} \overline{V}_{i_1,...,i_k}$.

Wir wählen a_1 und a_2 nun so, dass V eine Kugel mit Radius a_1 enthält und selbst vor einer Kugel mit Radius a_2 enthalten wird. Dann gilt für alle $(i_1, ..., i_k) \in \mathcal{Q}$, dass die Menge $V_{i_1,...,i_k}$ eine Kugel mit dem Radius $c_{i_1} \cdots c_{i_k} a_1$ enthält und deshalb auch $(\min_i c_i) a_1 r$ und selbst von einer Kugel mit dem Radius $c_{i_1} \cdots c_{i_k} a_2$ enthalten wird und deshalb auch von einer Kugel mit Radius $a_2 r$. Seien $\mathcal{Q}_1$ alle Tupel $(i_1, ..., i_k)$ aus $\mathcal{Q}$, so dass B $\overline{V}_{i_1,...,i_k}$ schneidet. Mit Lemma (3.1) folgt, dass es höchstens $q = (1 + 2a_2)^n a_1^{-n} (\min_i c_i)^{-n}$ Tupel in $\mathcal{Q}_1$ gibt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(B) = \tilde{\mu}(F \cap B) &= \mu\{(i_1, i_2, ...) : x_{i_1,i_2,...} \in F \cap B\} \\ &\leq \mu \left\{ \bigcup_{\mathcal{Q}_1} I_{i_1,...,i_k} \right\}, \end{aligned}$$

da, falls $x_{i_1,i_2,...} \in F \cap B \subset \bigcup_{\mathcal{Q}_1} \overline{V}_{i_1,...,i_k}$, dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $(i_1, ..., i_k) \in \mathcal{Q}_1$. Mit (13) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(B) &\leq \sum_{\mathcal{Q}_\infty} \mu(I_{i_1,...,i_k}) \\ &= \sum_{\mathcal{Q}_1} (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s \\ &\leq \sum_{\mathcal{Q}_1} r^s \\ &\leq r^s q. \end{aligned}$$

Da jede Menge U von einer Kugel mit dem Radius $|U|$ eingeschlossen wird, gilt $\tilde{\mu}(U) \leq |U|^s q$, und daraus folgt nach dem Massenverteilungsprinzip (B), dass $\mathcal{H}^s(F) \geq q^{-1} > 0$ und $dim_H F = s$.

Falls $\mathcal{Q}$ eine beliebige Menge endlicher Tupel ist, so dass für jedes $(i_1, ..., i_k) \in \mathcal{I}$ genau ein $k \in \mathbb{N}$ mit $(i_1, ..., i_k) \in \mathcal{Q}$ existiert, dann folgt aus (9) induktiv, dass $\sum_{\mathcal{Q}} (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s = 1$ gilt. Deshalb, falls $\mathcal{Q}$ wie in (13) gewählt wird, enthält $\mathcal{Q}$ höchstens $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$ Tupel. Für jedes Tupel $(i_1, ..., i_k) \in \mathcal{Q}$ gilt $|\overline{V}_{i_1,...,i_k}| = c_{i_1} \cdots c_{i_k} |\overline{V}| \leq r|\overline{V}|$, was bedeutet, dass F von $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$ Mengen mit Durchmessern von $r|\overline{V}|$ mit $r < 1$ überdeckt werden kann. Mit der Äquivalenzdefinition aus [1][3.17] folgt dann, dass $\overline{dim}_B F \leq s$; beachte, dass $s = dim_H F \leq \underline{dim}_B F \leq \overline{dim}_B F \leq s$. Mit (3.17) folgt dann die Behauptung. $\square$

Ist die Bedingung für offene Mengen nicht erfüllt, so kann gezeigt werden, dass $dim_H F = dim_B F \leq s$.

Beispiel:
Das Sierpinsky-Dreieck F kann als der Attraktor der Kontraktionsähnlichkeiten

$$S_2(x) = \frac{1}{2}x,\ S_2(x) = \frac{1}{2}x + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix},\ S_3(x) = \frac{1}{2}x + \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

beschrieben werden. Die Bedingung für offene Mengen (3.1) ist für V als das Innere von E_0 gewählt erfüllt. Damit ist nach obigen Theorem $dim_H F = dim_B F = \log 3/\log 2$, was gerade die Lösung von $3(\frac{1}{2})^s = \sum_1^3 (\frac{1}{2})^s = 1$ ist.

Abbildung (3) zeigt das ,,Sierpinsky-Gasket" deren Kontraktionsähnlichkeiten dieselben Skalierungsfaktoren besitzten. Damit besitzt diese auch dieselbe Dimension.

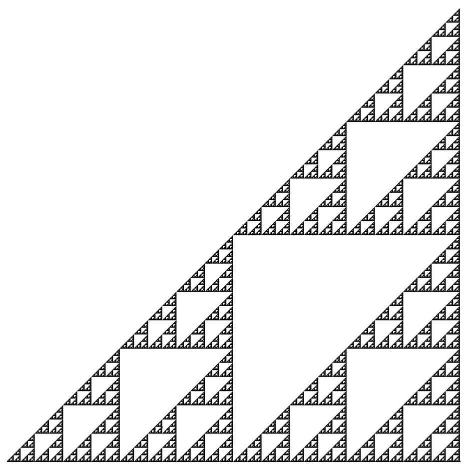

Abbildung 3: ,,Sierpinsky-Gasket", nach dem zweiten vorgeschlagenen Algorithmus berechnet

4 Weiterführende Überlegungen

Das Resultat, das in Theorem (3.2) festgehalten wurde, kann auch dazu benutzt werden die Dimension eines Attraktors eines IFS, dessen Kontraktionen keine Kontraktionsähnlichkeiten sind, abzuschätzen.

Proposition 4.1. *Sei F der Attraktor eines IFS bestehend aus den Kontraktionen $S_1, ..., S_m$ auf einer abgeschlossenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. D.h. also, dass*

$$|S_i(x) - S_i(y)| \le c_i |x - y|$$

mit $0 \le c_i \le 1$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$ für alle i erfüllt ist. Dann gilt:

$$dim_H F \le s \text{ und } \overline{dim}_B F \le s$$

wobei s die Lösung von $\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$ ist.

Beweis. Diese Abschätzung leiten sich analog zu dem Beweis von (3.2) her. Dabei muss allerdings berücksichtigt werden, dass nur die Ungleichung $|A_{i_1,...,i_k}| \leq c_{i_1} \cdots c_{i_k}|A|$ gilt. □

Proposition 4.2. *Sei $\{S_1, ..., S_m\}$ ein IFS auf einer abgeschlossenen Teilmenge D des $\mathbb{R}^n$, für das*

$$b_i|x - y| \leq |S_i(x) - S_i(y)| \tag{14}$$

mit $0 < b_i < 1$ für alle i gilt. Angenommen der Attraktor F erfüllt

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F), \tag{15}$$

wobei die Vereinigung disjunkt ist, dann ist F total unzusammenhängend und $dim_H F \geq s$ mit s wie in (7).

Beweis. Sei $d > 0$ das Minimum aller paarweisen Distanzen der Mengen $S_1(F), ...S_m(F)$, d.h. $d = min_{i \neq j} \inf\{|x - y| : x \in S_i(F),\ y \in S_j(F)\}$. Sei $F_{i_1,...,i_k} = S_{i_1} \circ ... \circ S_{i_k}(F)$. Wir definieren $\mu(F_{i_1,...,i_k}) = (b_{i_1} \cdots b_{i_k})^s$. Da

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \mu(F_{i_1,...,i_k,i}) &= \sum_{i=1}^{m} (b_{i_1} \cdots b_{i_k} b_i)^s \\
&= (b_{i_1} \cdots b_{i_k})^s \\
&= \mu(F_{i_1,...,i_k}) \\
&= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} F_{i_1,...,i_k,i}\right)
\end{aligned}$$

gilt, folgt dass μ eine Massenverteilung auf F mit $\mu(F) = 1$ ist.
Für $x \in F$ existiert eine Folge $i_1, i_2, ...,$ so dass $x \in F_{i_1,...,i_k}$ für alle k. Für $0 < r < d$ sei k die größte natürliche Zahl, so dass

$$b_{i_1} \cdots b_{i_k} d \leq r < b_{i_1} \cdots b_{i_{k-1}} d.$$

Für ein Tupel $i'_1, ...i'_k$, das von $i_1, ...i_k$ verschieden ist, sind die Mengen $F_{i_1,...,i_k}$ und $F_{i'_1,...,i'_k}$ disjunkt und haben mindestens den Abstand $b_{i_1} \cdots b_{i_{k-1}} d > r$. Daraus folgt, dass $F \cap B(x, r) \subset F_{i_1,...,i_k}$ und damit

$$\mu(F \cap B(x, r)) \leq \mu(F_{i_1,...,i_k}) = (b_{i_1} \cdots b_{i_k})^s \leq d^{-s} r^s.$$

Falls U F schneidet, dann existiert ein $x \in F$, so dass $U \subset B(x, r)$ mit $r = |U|$. Dann ist $\mu(U) \leq d^{-s} r^s$ und mit dem Massenverteilungsprinzip (B) folgt, dass $\mathcal{H}^s(F) > 0$ und $dim_H F \geq s$. □

Beispiel:
Wir betracheten eine Modifikation der Kantormenge. Sei $D = \left[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}), (1 + \sqrt{3})\right]$ und seien $S_1, S_2 : D \to D$ durch $S_1 = 1 + 1/x,\ S_2 = 2 + 1/x$ beschrieben. Dann gilt $0,44 < dim_H F \leq \underline{dim}_B F \leq \overline{dim}_B F < 0,66$, wobei F den Attraktor von

$\{S_1, S_2\}$ bezeichnet.

Berechnung:
Da $S_1(D) = \left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}), \sqrt{3}\right]$ und $S_2 = \left[\frac{1}{2}(3+\sqrt{3}), (1+\sqrt{3})\right]$ dürfen die beiden Propositionen (4.1) und (4.2) benutzt werden um $dim_H F$ abzuschätzen. Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung geht hervor, dass für zwei unterschiedliche Punkte $x, y \in D$ die Gleichung $(S_i(x) - S_i(y))/(x-y) = S_i'(z_i)$ für ein $z_i \in D$ erfüllt ist. Damit ist für $i \in \{1, 2\}$

$$\inf_{x \in D} |S_i'(x)| \leq \frac{|S_i(x) - S_i(y)|}{|x-y|} \leq \sup_{x \in D} |S_i'(x)|$$

erfüllt. Da $S_1'(x) = S_2'(x) = -1/x^2$ ist, gilt

$$\frac{1}{2}(2-\sqrt{3}) = (1+\sqrt{3})^{-2} \leq \frac{|S_i(x) - S_i(y)|}{|x-y|} \leq (\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}))^{-2} = 2(2-\sqrt{3})$$

für $i = 1$ und $i = 2$. Nach den beiden Propositionen (4.1) und (4.2) ist die untere bzw. obere Schranke der Dimension durch die Lösung der Gleichung $2(\frac{1}{2}(2-\sqrt{3}))^s = 1$ bzw. $2(2(2-\sqrt{3}))^s = 1$ gegeben. Dies auf $s = \log 2 / \log 2(2-\sqrt{3}) = 0,34$ bzw. $\log 2 / \log \frac{1}{2}(2-\sqrt{3}) = 1,11$.

Für eine Teilmenge der reelen Zahlen ist eine obere Schranke von 1,11 nicht besonders sinnvoll, da wir bereits wissen, dass die Dimension nicht größer als 1 sein kann. Eine Möglichkeit die Schranken zu verbessern besteht darin ein anderes IFS zu suchen für das die Abschätzung mittels der beiden Propositionen (4.1) und (4.2) bessere Schranken liefert. Betrachten wir das IFS bestehend aus den vier Abbildungen

$$S_i \circ S_j = i + \frac{1}{j + 1/x} = i + \frac{x}{jx+1}$$

mit $i, j \in \{1, 2\}$. Es ist klar, dass dieses IFS denselben Attraktor besitzt. Indem wir nun die Ableitungen berechnen und analog zu oben den Mittelwertsatz benutzen, erhalten wir

$$(S_i \circ S_j)'(x) = (jx+1)^{-2}$$

und

$$(j(1+\sqrt{3})+1)^{-2}|x-y| \leq |S_i \circ S_j(x) - S_i \circ S_j(y)| \leq (\frac{1}{2}j(1+\sqrt{3})+1)^{-2}|x-y|.$$

Die untere bzw. obere Schranke ist jetzt durch $2(2+\sqrt{3})^{-2s} + 2(3+2\sqrt{3})^{-2s} = 1$ bzw. $2(\frac{1}{2}(3+\sqrt{3}))^{-2s} + 2(2+\sqrt{3})^{-2s} = 1$ gegeben. Aus der Lösung dieser Gleichungen folgt die Behauptung.

Die im obigen Beispiel benutzte Technik des Zusammenfassens von Kontraktionen ist bei vielen Attraktoren, die durch Kontraktionen, die keine strikten Kontraktionsähnlichkeiten sind, sinnvoll. Falls F der Attraktor des IFS

$\{S_1, ..., S_m\}$ ist, dann ist F auch der Attraktor der m^k Kontraktionen $\{S_{i_1} \circ ... \circ S_{i_m}\}$. Für den Fall, dass die S_i zweimal differenzierbar sind, kann gezeigt werden, dass die Kontraktionen $\{S_{i_1} \circ ... \circ S_{i_m}\}$ für wachsendes k sich ähnlich wie Kontraktionsähnlichkeiten verhalten.
Genauer, für Kontraktionen auf $D \subset \mathbb{R}$, $b := \inf_{x \in D} |(S_{i_1} \circ ... \circ S_{i_m})'(x)|$ und $c := \sup_{x \in D} |(S_{i_1} \circ ... \circ S_{i_m})'(x)|$ gilt

$$b|x - y| \leq |(S_{i_1} \circ ... \circ S_{i_m})(x) - (S_{i_1} \circ ... \circ S_{i_m})(y)| \leq c|x - y|$$

für $x, y \in D$. Für wachsendes k wird sich der Wert b/c der 1 immer weiter nähern. Wendet man die Propositionen (4.1) und (4.2) auf die m^k Transformationen an, dann bekommt man, für wachsendes k, immer bessere obere unter untere Schranken für die Dimension von F.

Dies kann noch weitergedacht werden. Falls die S_i auf $D \subset \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar sind, dann ist

$$\frac{|(S_{i_1} \circ ... \circ S_{i_m})(x) - (S_{i_1} \circ ... \circ S_{i_m})(y)|}{|x - y|} \sim |(S_{i_1} \circ ... \circ S_{i_m})'(\omega)|$$

für große k und $x, y, \omega \in D$. Da sich die $S_{i_1} \circ ... \circ S_{i_m}$ für große k ähnlich wie Kontraktionsähnlichkeiten verhalten, könnte man mit Theorem 3.2 erwarten, dass sich die Dimension des Attraktors F ähnlich dem Wert s verhält, der die Gleichung

$$\sum_{\mathcal{I}_k} |(S_{i_1} \circ ... \circ S_{i_k})'(\omega) = 1$$

erfüllt. Diese Erwartung motiviert das folgende Theorem.

Theorem 4.1. *Sei $V \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Seien $S_1, ..., S_m$ Kontraktionen auf $\overline{V}$, die zweimal differenzierbar sind, und für die $a \leq |S_i'(\omega) \leq c$ für alle i und $\omega \in V$ gilt, wobei $0 < a \leq c$ Konstanten sind. Angenommen die S_i erfüllen die Bedingung für offene Mengen 3.1 mit der offenen Menge V, dann existiert der Grenzwert*

$$\lim_{k \to \infty} \left[\sum_{\mathcal{I}_k} |(S_{i_1} \circ ... \circ S_{i_k})'(\omega)|^s \right] = \varphi(s) \tag{16}$$

für alle $s > 0$, ist unabhängig von $\omega \in V$ und ist fallend in s. Falls F der Attraktor des IFS ist, dann ist $dim_H F = dim_B F$ gleich der Lösung von $\varphi(s) = 1$ und F ist eine s-Menge, d.h. $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ für dieses s.

ohne Beweis.

5 Selbstaffine Mengen

Selbstaffine Mengen stellen eine wichtige Klasse von Mengen dar, und beinhalten selbstähnliche Mengen.

Definition 5.1:
Eine Abbildung $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heisst *affin* falls sie sich als

$$S(x) = T(x) + b$$

schreiben lässt, wobei T eine lineare Transformation auf dem $\mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor ist.

Eine affine Transformation ist eine Abbildung, die sich aus Transation, Rotation und Sreckung zusammensetzt. Im Unterschied zu Ähnlichkeitstransformationen lassen affine Transformationen unterschiedliche Skalierungsfaktoren entlang der Koordinatenachsen zu.
Falls ein IFS aus affinen Kontraktionen $S_1, ..., S_m$ auf dem $\mathbb{R}^n$ besteht, wird der Attraktor dieses IFS *selbstaffine Menge* genannt.
Genau wie vorher bei selbstähnlichen Mengen suchen wir nun nach einer einfachen Methode die Dimension des Attraktors zu bestimmen und wollen wenn möglich dazu auch nur Eigenschaften der Transformationen ausnutzen.

Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Transformation, d.h. eine nicht-singuläre Kontraktion. Die Singulärwerte $1 > \alpha_1 \geq ... \geq \alpha_n > 0$ von T, können auf zwei unterschiedliche Arten definiert werden. Einerseits als Längen der Hauptaxenabschnitte des Ellipsoids T(B), der durch die Abbildung der n-dimensionalen Einheitskugel B oder andererseits als die positiven Wurzeln die Eigenwerte von $\overline{T}^t T$. Für $0 \leq s \leq n$ definieren wir die *Singulärwertfunktion* als

$$\varphi^s(T) := \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{r-1} \alpha_r^{s-r+1},$$

wobei $r \in \mathbb{N}$ so gewählt ist, dass $r - 1 \leq s \leq r$ gilt. $\varphi^s(T)$ ist stetig und streng monoton fallend in s. Darüber hinaus, kann für festes s gezeigt werden, dass $\varphi^s(T)$ submultiplikativ ist, das heisst, es gilt

$$\varphi^s(TU) \leq \varphi^s(T)\varphi^s(U)$$

für lineare Transformationen T und U. Wir definieren die *Summe des k-ten Levels* als $\Psi_k^s := \sum_{\mathcal{I}_k} \varphi^s(T_{i_1} \circ ... \circ T_{i_k})$, wobei $\mathcal{I}_k$ gleich wie oben ist. Für festes s gilt dann:

$$\begin{aligned}
\Psi_{k+q}^s &= \sum_{\mathcal{I}_{k+q}} \varphi^s(T_{i_1} \circ ... \circ T_{i_{k+q}}) \\
&\leq \sum_{\mathcal{I}_{k+q}} \varphi^s(T_{i_1} \circ ... \circ T_{i_k}) \varphi^s(T_{i_{k+1}} \circ ... \circ T_{i_{k+q}}) \\
&= \left(\sum_{\mathcal{I}_k} \varphi^s(T_{i_1} \circ ... \circ T_{i_k}) \right) \left(\sum_{\mathcal{I}_q} \varphi^s(T_{i_1} \circ ... \circ T_{i_q}) \right) \\
&= \Psi_k^s \Psi_q^s
\end{aligned}$$

Dass heisst also, dass auch die Folge der Ψ_k^s submultiplikativ in k ist. Daraus folgt, dass $(\Psi_k^s)^{1/k}$ für $k \to \infty$ gegen einen Wert Ψ_∞^s konvergiert. Da φ^s in s fällt, fällt auch Ψ^s_∞. Vorrausgesetzt $\Psi^n_\infty \leq 1$, dann existiert ein eindeutiges s, das wir mit $d(T_1, ..., T_m)$ bezeichnen, so dass $1 = \Psi^s_\infty \lim_{k\to\infty}(\sum_{\mathcal{I}_k}(T_{i_1} \circ ... \circ T_{i_k})^{1/s}$. Umgestellt also:

$$d(T_1, ..., T_m) = inf \left\{ s : \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mathcal{I}_k} \varphi^s(T_{i_1}, ..., T_{i_k}) < \infty \right\}$$

Theorem 5.1. *Seien $T_1, ..., T_m$ lineare Kontraktionen und seien $y_1, ..., y_m \in \mathbb{R}^n$ Vektoren. Falls F die selbstaffine Menge ist, die*

$$F = \bigcap_{i=1}^{m} (T_i(F) + y_i)$$

erfüllt, dann ist $dim_H F = dim_B F \leq d(T_1, ..., T_m)$. Falls $|T_i(x) - T_i(y)| \leq c|x-y|$ für alle i, wobei $0 < c < \frac{1}{2}$, dann gilt Gleichheit für fast alle $(y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^{nm}$ im Sinne des nm-dimensionalen Lebesque-Mases.

Partieller Beweis [1][Theorem 9.12].

6 Anwendung auf Bildkodierung

In den vorrausgehenden Abschnitten haben wir gesehen wie man mit einer relativ kleinen Anzahl an Kontraktionen komplizierte fraktale Strukturen beschreiben kann. Dies könnte auch für Datenkommpression interessant sein.

Dazu ist es einerseits notwendig zu untersuchen was für Strukturen als Attraktoren von IFS dargestellt oder approximiert werden können und anderseits wie man Kontraktionen finden kann, deren Attraktor der gewünschten Struktur entspricht.

Theorem 6.1. *Sei $\{S_1, ..., S_m\}$ ein IFS und nehmen wir an, dass $|S_i(x) - S_i(x)| \leq c|x-y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $c < 1$ gilt. Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere, kompakte Menge. Dann gilt*

$$d(E, F) \leq d\left(E, \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E)\right) \frac{1}{(1-c)}, \tag{17}$$

wobei F der Attraktor des IFS ist und d die Hausdorffmetrik (siehe (2.4)).

Beweis. Wendet man die Dreiecks-Ungleichung auf die Hausdorffmetrik an, setzt danach die Definition des Attraktors (2) ein, und wendet (5) an, so erhält man das gewünschte Resultat.

$$\begin{aligned} d(E,F) &\leq d\left(E, \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E)\right) + d\left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i(E), F\right) \\ &= d\left(E, \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E)\right) + d\left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i(E), \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F)\right) \\ &\leq d\left(E, \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E)\right) + cd(E,F) \end{aligned}$$

□

Aus (6.1) geht hervor, dass jede kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ beliebig genau approximiert werden kann.

Korollar 6.2. *Sei E eine nicht-leere Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Für jedes $\delta > 0$ existieren Kontraktionsähnlichkeiten $S_1, ..., S_m$ mit einem Attraktor, der $d(E,F) < \delta$ erfüllt.*

Beweis. Seien $B_1, ..., B_m$ Kugeln, die E überdecken, mit Mittelpunkten in E und Radien die höchstens $\frac{1}{4}\delta$ groß sind. Dann ist $E \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_i \subset E_{\delta/4}$, wobei $E_{\delta/4}$ die $\frac{1}{4}\delta$-Umgebung von E ist. Für alle i sei, sei S_i eine Kontraktionsähnlichkeit mit einem kleineren Skalierungsfaktor als $\frac{1}{2}$, die E auf eine Teilmenge von B_i abbildet. Dann gilt $S_i(E) \subset B_i \subset (S_i(E))_{\delta/2}$ und damit auch $(\bigcup_{i=1}^{m} S_i(E)) \subset E_{\delta/4}$ und $E \subset \bigcup_{i=1}^{m}(S_i(E))_{\delta/2}$. Aus der Definition der Hausdorffmetrik (2.4) folgt $d(E, \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E)) \leq \frac{1}{2}\delta$. Mit (6.1) erhalten wir $d(E,F) < \delta$, wobei F den Attraktor des IFS bezeichnet. □

Die Approximation durch einen Attraktor des IFS, dass wie in obigem Beweis konstruiert wird, ist entweder sehr grob oder benötigt sehr viel Kontraktionen. Um dies zu vermeiden könnte man versuchen in einem ersten Schritt die groben Umrisse einer Struktur zu approximieren und diese dann durch wiederholtes anwenden der Kontraktionen zu verfeinern.

A Fixpunktsatz von Banach

Der folgende Satz wurde [2] direkt entnommen.

Theorem A.1. *Existenz: Eine Kontraktion $\varphi : M \to M$ eines (nichtleeren) vollständigen metrischen Raumes M besitzt genau einen Fixpunkt, also einen Punkt $\xi \in M$ mit $\varphi(\xi) = \xi 4$.*

Dabei ist:

- *z.B. jeder Banachraum, und unter diesen jeder normierte endlichdimensionale Vektorraum, ein vollständiger metrischer Raum*

- *eine Kontraktion eine Abbildung $\varphi : M \to M$, welche Lipschitz-stetig mit einer Konstanten $0 \leq \lambda < 1$ ist.*

Konstruktion: Für jeden Startwert $x_0 \in M$ konvergiert die Folge (x_n) mit $x_{n+1} := \varphi(x_n)$ gegen ξ.
Fehlerabschätzung: Es gibt die folgenden Abschätzungen für den Abstand des Fixpunktes zur rekursiven Folge:

- *A-priori-Abschätzung*
  $d(x_n, \xi) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1)$ *(u.a. auch für n=0) für den n-ten Fehler durch die ersten beiden Folgenglieder und die*

- *A-posteriori-Abschätzung*
  $d(x_n, \xi) \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} d(x_{n-1}, x_n)$ *für den n-ten Fehler durch die beiden zuletzt bestimmten Folgenglieder.*

  $0 \leq \lambda < 1$ *ist dabei die Kontraktionskonstante bzw. Lipschitz-Konstante.*

Beweisidee für normierte Räume: Um den Beweisgang zu verstehen, ist es hilfreich, zunächst in einem Banach-Raum zu operieren. Die eigentlichen Beweisschritte können dann auch im metrischen Raum vollzogen werden. Wir konstruieren die rekursive Folge $x_{n+1} := \varphi(x_n)$ mit irgendeinem Startpunkt $x_0 \in B$. Diese fassen wir als Partialsummen einer (Teleskop-)Reihe auf, deren Glieder die Differenzen $x_n = x_{n+1} - x_n$, sind, $x_n - x_0 = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$. Von der Reihe zeigen wir, dass sie eine geometrische Reihe als Majorante hat. Wegen der Vollständigkeit des Raumes folgt daraus die Konvergenz der Reihe, der Punkt $\xi := x_0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist der gesuchte Fixpunkt.

Beweis im metrischen Raum: Wir betrachten das Problem im vollständigen metrischen Raum. Wieder konstruieren wir die rekursive Folge. Statt direkt mit Teleskopsummen zu operieren, betrachten wir die Abstände $b_n := d(x_n,\, x_{n+1})$. Die mehrfache Anwendung der Dreiecksungleichung auf die Differenz beliebiger Folgenglieder liefert

$$d(x_n,\, x_{n+p}) \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} b_k.$$

Zeigen wir also, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergiert, genauer eine geometrische Reihe als Majorante hat, so ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und damit konvergent. Nach Voraussetzung der Kontraktivität gilt:

$$b_{n+1} = d(x_{n+1},\, x_{n+2}) = d\left(\phi(x_n),\, \phi(x_{n+1})\right) \leq \lambda d(x_n, x_{n+1}) = \lambda b_n.$$

Also ist $(\lambda^{-n} b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge, mithin $b_{n+p} \leq \lambda^p b_n$, insbesondere

$$0 \leq b_n \leq \lambda^n b_0, \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k \leq \frac{1}{1-\lambda} b_0 \mathit{wegen}\ \lambda < 1.$$

Es gibt also den Grenzwert $\xi := \lim_{n\to\infty} x_n$. Für die Abschätzungen erhalten wir

$$d(x_n, \xi) \leq \sum_{k=n}^{\infty} b_k \leq \frac{1}{1-\lambda} b_n \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} b_0$$

Insbesondere ist $d(\phi(\xi), \xi) = \lim_{n\to\infty} d(\phi(x_n), \xi) = \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, \xi) = 0$, also $\xi = \phi(\xi)$ tatsächlich ein Fixpunkt. Für einen weiteren möglichen Fixpunkt η gilt $d(\eta, \xi) = d(\phi(\eta), \phi(\xi)) \leq \lambda d(\eta, \xi)$, was nur bei $\eta = \xi$ möglich ist. $\square$

B Massenverteilungsprinzip

Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einer Teilmenge F eines metrischen Raumes (X, d). Angenommen es existieren Konstanten c und r_0, so dass

$$\mu(B) \leq |B|^s c$$

für eine beliebege Kugel B mit Radius $r < r_0$ gilt. Dann gilt für ein $E \subset F$ mit $\mu(E) = \lambda > 0$, dass $\mathcal{H}^s(E) \geq \lambda/c$.

Literatur

[1] Falconer, Kenneth: *Fractal Geometry - Mathematical Foundations and Applications* ISBN: 0-470-84861-8 (Cloth) ISBN: 978-0-470-84861-6 (Paper)

[2] http://de.wikipedia.org/wiki/Fixpunktsatz_von_Banach

[3] R. Scheider, W. Weil: *Stochastische Geometrie*, Teubner Stuttgart, 2000