TECHNIKEN ZUR BERECHNUNG DER DIMENSION

KATHARINA KIESEL

Zusammenfassung. Im Folgenden werden Techniken zur Berechnung der Dimension von Fraktalen aufgezeigt. Es wird unter anderem definiert was eine Masse-Verteilung ist und wie mit dem Masse-Verteilungs-Prinzip die Dimension abgeschätzt werden kann. Es folgen zwei Beispiele, eines zur Cantor-Menge und eines zur modifizierten Cantor-Menge, dabei wird das Masse-Verteilungs-Prinzip angewendet. Im letzten Teil wird die Potential-theoretische Methode vorgestellt.

1. Einleitung

Für die Berechnung der Dimension von Fraktalen wird unter anderem mit der Hausdorff und der Box-Dimension gearbeitet. Im Folgenden werden dafür notwendige Definitionen gegeben.

Definition 1.1. *U sei eine nicht-leere Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Der Durchmesser $|U|$ sei definiert als $|U| = \sup\{|x-y| : x, y \in U\}$. U_i ist eine δ-Überdeckung von F, falls U_i eine abzählbare Anzahl von Mengen ist, mit größtem Durchmesser δ, die F überdecken.*
Sei F eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und sei s eine nicht-negative Zahl, für jedes $\delta > 0$ definieren wir $\mathcal{H}^s_\delta(F) = \{\inf \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : U_i\delta$ Überdeckung von $F\}$.
$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta\to 0}, \mathcal{H}^s_\delta(F)$ ist das s-dimensionale Hausdorff-Maß von F.
Als Hausdorff-Dimension wird Folgendes bezeichnet: $\dim_H F = \inf\{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$
Bemerkung: Die Hausdorff-Dimension ist der Wert für s an dem $\mathcal{H}^s(F)$ von ∞ nach 0 springt.

Definition 1.2. *F sei eine nicht-leere beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $N_\delta(F)$ sei die kleinste Anzahl der Mengen, die höchstens den Durchmesser $\delta > 0$ haben und F überdecken. Die obere Box-Dimension wird definiert als:*

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(F) = \liminf_{k\to\infty} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}.$$

Die untere Box-Dimension wird definiert als:

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}}(F) = \limsup_{k\to\infty} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}.$$

2. Masse-Verteilungs-Prinzip

Theorem 2.1. *Angenommen F kann von n_k Mengen mit maximalen Durchmesser $\delta_k > 0$, wobei $\delta_k \to 0$ für $k \to \infty$, überdeckt werden. Dann gilt:*

$$\dim_{\mathrm{H}}(F) \leq \underline{\dim}_{\mathrm{B}}(F) \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{\log(n_k)}{-\log(\delta_k)}.$$

Gilt zusätzlich $\delta_{k+1} \geq c\delta_k \ \forall k \in \mathbb{N}$ mit einem $c \in (0,1)$, so folgt:

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(F) \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{\log(n_k)}{-\log(\delta_k)}.$$

Gilt zusätzlich $\limsup\limits_{k\to\infty} n_k\delta_k^s < \infty$, so ist $\mathcal{H}^s(F) < \infty$.

Beweis. Die erste Ungleichung folgt aus den Definitionen. Wir werden nur die zweite Ungleichung bewiesen.

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(F) := \limsup_{\delta\to\infty} \frac{\log(N_\delta(F))}{-\log(\delta)}$$

Für alle δ gibt es eine Folge a_n, die gegen Null geht.

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(F) := lim \frac{\log(N_{a_n}(F))}{-\log(a_n)}$$

Zu jedem a_n wähle ein k_n mit

$$\begin{gathered} \delta_{k_n+1} \leq a_n \leq \delta_{k_n} \\ \Rightarrow c\delta_{k_n} \leq \delta_{k_n+1} \leq a_n \leq \delta_k \\ \Rightarrow \log(\delta_k) \geq \log(a_n) \end{gathered}$$

Hiermit folgt:

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_{\mathrm{B}}(F) &= lim_{n\to\infty} \frac{\log(N_{a_n}(F))}{-\log(a_n)} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(N_{\delta_k+1}(F))}{-\log(\delta_{k_n})} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(N_{\delta_k+1}(F))}{\log c - \log(\delta_{k_n+1})} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\frac{\log(N_{\delta_k+1}(F))}{-\log(\delta_{k_n+1})}}{\frac{\log c}{\log(\delta_{k_n+1})} + 1} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(N_{\delta_k+1}(F))}{-\log(\delta_{k_n+1})} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(N_{\delta_k}(F))}{-\log(\delta_k)} \end{aligned}$$

□

Im Folgenden werden wir den Begriff M̈asse-Verteilungb̈enutzen, welche eine wichtige Rolle spielen wird.

Definition 2.2. *Sei $F \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge und μ ein äußeres Borel-Maß auf $\mathbb{R}^n$. Ist* $\operatorname{supp}(\mu) \subset F$ *und gilt $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$, so wird μ als* **Masse-Verteilung** *auf F bezeichnet. O.B.d.A. können wir $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$ wählen indem wir μ durch $\mu(\mathbb{R}^n)^{-1}\mu$ ersetzen.*

Theorem 2.3. *Masse-Verteilungs-Prinzip (MVP)*
Sei μ eine Masse-Verteilung auf F. Wir nehmen an, dass es für ein $s > 0$ Konstanten $c = c(s) > 0$ und $\delta_0 = \delta_0(s) > 0$ gibt, so dass für alle Mengen U mit Durchmesser $|U| \leq \delta$ gilt:

$$\mu(U) \leq c \cdot |U|^s.$$

Dann folgt daraus, dass $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$ und

$$s \leq \dim_{\mathrm{H}}(F) \leq \underline{\dim}_{\mathrm{B}}(F) \leq \overline{\dim}_{\mathrm{B}}(F).$$

Beweis. U_i sollen Überdeckungen von F sein.

$$0 < \mu(F) = \mu(\cup_i U_i) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq c \cdot \sum_i |U_i|^s$$

$$\Rightarrow \frac{\mu(F)}{c} \leq \mathcal{H}^s_\delta(F)$$

Es wird nun auf beiden Seiten das Infimum angewendet. □

2.1. **Beispiel zur Cantor-Menge.** Es folgt nun ein Beispiel zur Cantor - Menge, in dem die untere Grenze für die Hausdorff-Dimension berechnet wird.

Das MVP ermöglicht es schnell eine untere Grenze für die Hausdorff-Dimension zu finden.
Sei $\mu(F)$ die natürliche Massen-Verteilung auf F, so dass für jedes k die Intervalle I von E_k, der Länge 3^{-k}, die Masse $\mu(I) = 2^{-k}$ haben. Die Gesamtmasse von E_k wird bei jedem Schritt geteilt und gleichmäßig auf die E_{k+1} Unterintervalle verteilt.

k	Anzahl Intervalle	Intervall-Länge	Masse
1	2	1/3	1/2
2	4	1/9	1/4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	2^k	3^{-k}	2^{-k}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Sei U eine Menge mit Durchmesser $|U| < 1/3$ und sei $k \in \mathbb{N}$ so dass

$$3^{-(k+1)} \leq |U| < 3^{-k}$$

- U kann höchstens eins der Intervalle von E_k schneiden. U hat höchstens die Länge eines Teilintervalls, die Lücken sind gleich groß wie die Intervalle oder größer.
- $\mu(U) \leq 2^{-k} = e^{-k\log 2} = e^{-k\log(2)\frac{\log(3)}{\log(3)}} = e^{-k\log(3)\frac{\log(2)}{\log(3)}} = (3^{-k})^{\frac{log(2)}{\log(3)}} \leq 3|U|^{\frac{\log(2)}{\log(3)}} \leq c|U|^{\frac{\log(2)}{\log(3)}}$
- Aus dem MVP folgt: $\mathcal{H}^{\frac{\log(2)}{\log(3)}}(F) > 0 \Rightarrow \dim_{\mathrm{H}} F \geq \frac{\log(2)}{\log(3)}$

2.2. **Modifizierte Cantor-Menge.** Es folgt nun ein weiteres Beispiel mit einer modifizierten Cantor-Menge. Im Allgemeinen gilt: $\mathbb{R}^n \times \cdot\mathbb{R}^m$ hat die Dimension $n+m$. Es wird gezeigt, dass diese Aussage im folgenden Beispiel gilt.

Sei $F_1 = F \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$: Produkt der Cantor-Menge mit dem Einheits-Intervall.
Dann soll $\dim_{\mathrm{H}} F_1 = 1 + \frac{\log(2)}{\log(3)} = s$ sein mit $0 < \mathcal{H}^s(F_1) < \infty$

Zunächst wird gezeigt, wie man $s = 1 + \frac{\log(2)}{\log(3)}$ erhält.
Additivität des Maßes:

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(F_L) + \mathcal{H}^s(F_R)$$

Für ein Intervall gilt:

$$3\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(3F_L)$$

Skalierungs-Eigenschaft:

$$\mathcal{H}^s(\lambda H) = \lambda^s\mathcal{H}^s(H)$$
$$\mathcal{H}^s(3F_L) = 3^s\mathcal{H}^s(F_L)$$
$$\mathcal{H}^s(F_L) = 3^{1-s}\mathcal{H}^s(F)$$

Damit folgt für beide Intervalle:

$$\mathcal{H}^s(F) = 2 \cdot 3^{1-s}\mathcal{H}^s(F)$$

Ist $\mathcal{H}^s \in (0,\infty)$, dann folgt:

$$1 = 2 \cdot 3^{1-s}$$
$$1/2 = 3^{1-s}$$
$$e^{-\log(2)} = e^{(1-s)\log(3)}$$
$$s = \frac{\log(2)}{\log(3)} + 1$$

Aso ist $s = \frac{\log(2)}{\log(3)} + 1$ ist ein Kandidat für die Hausdorff-Dimension

Es folgt nun die Berechnung:
Für jedes k wird F von 2^k Intervallen der Länge 3^{-k} überdeckt.
Ein Rechteck bestehend aus 3^k Quadraten mit Seitenlänge 3^{-k} (Durchmesser

$3^{-k}\sqrt{2})$ überdeckt den Teil von F_1 über jedem Intervall.
Wenn man alle Rechtecke zusammen nimmt, dann wird F_1 von $2^k \cdot 3^k$ Quadraten mit Seitenlänge 3^{-k} überdeckt.

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s_{3^{-k}\sqrt{2}}(F_1) &\leq 3^k 2^k (3^{-k}\sqrt{2})^s \\
&= 3^{k-ks} \cdot 2^k \cdot 2^{\frac{s}{2}} \\
&= 3^{k-ks} \cdot 2^k \cdot 2^{\frac{s}{2}} \\
&= e^{k(1-s)\cdot\log(3)} \cdot e^{k\log(2)} \cdot 2^{\frac{s}{2}} \\
&= e^{k(1-(\frac{\log(2)}{\log(3)}+1)\cdot\log(3)} \cdot e^{k\log(2)} \cdot 2^{\frac{s}{2}} \\
&= e^{-k\log(3)\frac{\log(2)}{\log(3)}+k\log(2)} \cdot 2^{\frac{s}{2}} \\
&= e^{-k\log(2)+k\log(2)} \cdot 2^{\frac{s}{2}} \\
&= e^0 \cdot 2^{\frac{s}{2}} = 2^{\frac{s}{2}}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathcal{H}^s(F_1) \leq 2^{\frac{s}{2}}$ und $\dim_{\mathrm{H}}(F_1) \leq s$.

Wir wollen nun zeigen, dass $\mathcal{H}^s > 0$ ist.
Berechnung:
Sei μ eine Masseverteilung.
U ist ein Rechteck mit Seiten parallel zu den Koordinatenachsen und Höhe h
$\Rightarrow \mu(U) = h \cdot 2^{-k}$.
Jede Menge U kann von einem Quadrat mit Länge $|U|$ überdeckt werden.
Wenn $3^{-(k+1)} \leq |U| < 3^{-k}$, dann überdeckt U höchstens ein Basis-Intervall von F mit Seitenlänge 3^{-k}.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mu(U) &\leq |U| \cdot 2^{-k} \leq |U| \cdot 3^{-k\frac{\log(2)}{\log(3)}} \\
&\leq |U| \cdot (3|U|)^{\frac{\log(2)}{\log(3)}} \leq 3^{\frac{\log(2)}{\log(3)}} \cdot |U|^s
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ mit dem Masse-Verteilungs-Prinzip folgt: $\mathcal{H}^s(F_1) > 0$

3. Theorem 3

3.1. **Theorem 3.**

Theorem 3.1. *Sei F eine Borel-Menge des $\mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{H}^s(F) = \infty$, dann gibt es eine kompakte Teilmenge E von F, so dass $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$.*

Beweis. Für den Beweis siehe Seite 62 des Buches 'Mathematical foundations and applications' von K. Falconer. □

3.2. **Anwendungen des Theorems 3.**

- Man extrahiert sich aus der Menge F eine Untermenge mit positiver, endlicher Masse und schaut sich die Eigenschaften dieser Menge an. Anschließend versucht man von diese Eigenschaften im Zusammenhang mit der größeren Menge F zu interpretieren.
- Eine Menge F mit der Hausdorff-Dimension $t > 0$ hat $\mathcal{H}^s(F) = \infty$, falls $0 < s < t$ und beinhaltet somit eine s-dimensionale Menge.

4. Potential-theoretische Methode

4.1. **Korollare.** Die Folgenden zwei Propositionen werden für den Beweis des Theorems 4 benötigt.

Corollary 4.1. *Sei μ eine Masse-Verteilung im $\mathbb{R}^n$ und sei F eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$; c sei eine Konstante, mit $0 < c < \infty$. $B_r(x)$ sei die Kugel um x mit Radius $r > 0$. Dann gilt:*

- *Wenn* $\limsup_{r\to 0} \frac{B_r(x)}{r^s} < 0$ *für alle* $x \in F$ *dann ist* $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$
- *Wenn* $\limsup_{r\to 0} \frac{B_r(x)}{r^s} > 0$ *für alle* $x \in F$ *dann ist* $\mathcal{H}^s(F) \leq 2^s \frac{\mu(\mathbb{R}^n)}{c}$

Corollary 4.2. *F sei eine Borel-Menge des $\mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{H}^s(F) = \infty$. Dann gibt es eine kompakte Menge $E \subset F$, so dass $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$; für eine Konstante b gilt:*

$$\mathcal{H}^s(E \cap B_r(x)) \leq br^s$$

4.2. **Potential-theoretische Methode.** Die Potential-theoretische Methode ist ein Hilfsmittel um die Hausdorff-Dimension zu berechnen. Seither mussten wir dazu eine große Anzahl an kleinen Mengen abschätzen. Dies wird nun durch das Untersuchen eines bestimmten Integrals auf Konvergenz ersetzt.

Wer sich etwas mit Gravitation oder Elektrostatik auskennt, der hat schon mal etwas von Potentialen und Energie gehört.

Definition 4.3. *Für $s \geq 0$ ist das s-**Potential** an einem Punkt x im $\mathbb{R}^n$ aufgrund der Masse-Verteilung μ im $\mathbb{R}^n$ definiert als*

$$\varphi_s(x) = \int \frac{1}{|x-y|^s} d\mu(y) = \left(\frac{1}{|y|^s} * \mu \right)(x)$$

Bemerkung: Wenn wir uns im $\mathbb{R}^3$ befinden und $s = 1$, dann erhalten wir das Newton'sche Gravitationspotential.

Definition 4.4. *Die s-**Energie** einer Masse-Verteilung μ auf $\mathbb{R}^n$ ist*

$$I_s(\mu) = \int \varphi_s(x)d\mu(x) = \int\int \frac{1}{|x-y|^s}d\mu(x)d\mu(y)$$

Theorem 4.5. *Sei F ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$*

(1) *Falls es eine Masse-Verteilung μ auf F mit $I^s(\mu) < \infty$ gibt, dann ist $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ und $\dim_{\mathrm{H}}(F) \geq s$.*
(2) *Falls F eine Borel-Menge mit $\mathcal{H}^s(F) > 0$ ist, dann exisiert eine Masse-Verteilung μ auf F mit $I^t(\mu) < \infty$ für alle $t < s$.*

Beweis. Beweis zu Teilaussage 1: μ sei eine Masse-Verteilung mit Support in F. Definiere nun F_1 mit $F_1 := (x \in F : \limsup_{r\to 0} \frac{\mu(B_r(x))}{r^s} > 0)$ wobei $B_r(x)$ eine geschlossene Kugel um x mit Radius r ist. Wenn $x \in F$, dann finden wir eine Folge von Zahlen r_i die gegen 0 strebt, so dass $\mu(B_r(x)) \geq \epsilon r_r^s$

$$\mu(B(x,r)) \to \mu(x) = 0$$
$$r \to 0$$

O.b.d.A sei $\mu(x) = 0$ (Wenn $\mu(x) > 0$, dann ist klar, dass $I_s(\mu) = 0$ ist). Es folgt wegen der Stetigkeit von μ mit $0 < q_i < r_i$ und q_i klein genung:

$$\mu(A_i) \geq \frac{1}{4}\epsilon r_i^s (i \in N)$$

mit $A_i = B_{r_i}(x)\ B_{q_i}(x)$

$$\mu(A_i) = \mu(B_{r_i}(x)) - \mu(B_{q_i}(x))$$

Wir nehmen an, dass $r_{i+1} < q_i$ für alle i, so dass A_i disjunkte Ringe mit Mittelpunkt x sind.

$$\Rightarrow \phi_s(x) = \int \frac{1}{|x-y|^s}d\mu(y)$$
$$\geq \sum_{i=1}^{\infty}\int_{A_i} \frac{1}{|x-y|^s}d\mu(y)$$
$$\geq \sum_{\infty}^{i=1} \frac{1}{4}\epsilon r_i^s = \infty$$

da $|x-y| \geq r_i^{-s}$ Aber $I_s(\mu) = \int \phi_s d\mu(x) < \infty$, so dass $\phi_s(x) < \infty$ für μ-fast alle x $\mu(F_1) = 0 \to \lim(F_1) = 0$

$$lim_{r\to 0}\frac{\mu(B_r(x))}{r^s} = 0, falls x \in F/F_1$$

Mit dem Corollary 4.1 und $c > 0$ folgt:

$$\mathcal{H}^s(F) \geq \mathcal{H}^s(F/F_1) \geq \frac{\mu(F/F_1)}{c} \geq \frac{\mu(F) - \mu(F_1)}{c} = \frac{\mu(F)}{c} \to \mathcal{H}^s(F) = \infty$$

Beweis der Teilaussage 2: Angenommen $\mathcal{H}^s(F) > 0$. $\mathcal{H}^s$ wird benutzt um eine Masse-Verteilung μ auf F mit $I(\mu) < \infty$ für alle $t < s$ zu konstruieren. Mit dem Corollary 4.2 folgt: Es gibt ein $E \subset F$ mit $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$, so dass $\mathcal{H}^s(E \cap B_r(x)) \leq br^s$, wobei b eine Konstante sei. μ sei eine Einschränkung von H^s auf E, dass heißt:

$$\mu(A) := H^s(E \in A)$$

μ ist Masse-Verteilung auf F mit $0 < \mu(F) < \infty$ Sei $x \in R$ fest:

$$(*) : m(r) := \mu(B_r(x)) = H^s(E \in B_r(x)) \leq br^s$$

mit $0 \leq t \leq s$ folgt:

$$\phi_t(x) = \int_{|x-y|\leq 1} \frac{1}{|x-y|^t} d\mu(y) + \int_{|x-y|>1} \frac{1}{|x-y|^t} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{|x-y|>1} 1 d\mu(y) \leq \int_{R^n} 1 d\mu(y) = \mu(R^n)$$

$$\leq \int_1^0 r^{-t} dm(r) + \mu(R^n)$$

mit partieller Integration und der Gleichung (*) folgt:

$$[r^{-t} m(r)]_1^0 + t \int_1^0 r^{-(t+1)} m(r) dr + \mu(R^n)$$

$$\leq b - 0 + bt \int_1^0 r^{s-t-1} dr + \mu(R^n)$$

$$\leq b(1 + \frac{t}{s-t}) + H^s(F)$$

$$\Rightarrow \phi_t(x) \leq c_{t,s}$$

so dass:

$$I_t(\mu) = \int \phi_t d\mu(x) \leq \int c d\mu \leq c \cdot \mu(R^n) < \infty$$

□

4.3. **Verwendung Theorem 4.** Theorem 4 stellt eine Verbindung zwischen der Hausdorff-Dimension und der Potential-Theorie her. Wenn es eine Masse-Verteilung μ auf der Menge F gibt, die eine endliche s-Energie hat, dann hat F wenigstens die Dimension s.

4.4. **Anwendungen.**

- Anwendungen folgen vor allem noch in späteren Vorträgen (z.B. beim Beweis des Projektions-Theorems)
- Anwendung des Satzes 4 vor allem auch bei Fraktalen F_ϕ, die von einem Parameter abhängen.
  Es gibt einen natürlichen Weg eine Masseverteilung μ_ϕ auf F_ϕ für alle ϕ zu definieren, wenn wir zeigen können, dass für ein s Folgendes gilt:
  $\int I_s(\mu_\phi)d\phi = \int\int\int \frac{1}{|x-y|^s} d\mu_\phi(x)d\mu_\phi(y)d\phi < \infty$, dann ist $I_s(\mu_\phi) < \infty$ und $\dim_{\mathrm{H}}(F_\phi) \geq s$ für fast alle ϕ.

Literatur

[1] K. Falconer: Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. 2nd ed, Wiley, 2003.

E-mail address: katharina.kiesel@uni-ulm.de