

# Projektionen und Produkte von Fraktalen

Christine Kochner

09.01.07

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Projektionen von Fraktalen</b>	<b>3</b>
1.1	Einführende Beispiele . . . . .	3
1.2	Projektionen beliebiger Mengen . . . . .	3
1.3	Projektionen von s-Mengen ganzzahliger Dimension . . . . .	6
1.4	Projektionen von beliebigen Mengen ganzzahliger Dimension .	7
<b>2</b>	<b>Produkte von Fraktalen</b>	<b>10</b>
2.1	Einführung . . . . .	10
2.2	Produktformeln . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Referenzen</b>	<b>15</b>

## 1 Projektionen von Fraktalen

In diesem Kapitel befassen wir uns mit orthogonalen Projektionen im  $\mathbb{R}^2$  und deren Erweiterungen auf den  $\mathbb{R}^n$ . Insbesondere interessiert uns dabei die Änderung der Dimension bei der Projektion und die Änderung der Länge im  $\mathbb{R}^2$  bzw. allgemein eines  $k$ -dimensionalen Maß im  $\mathbb{R}^n$ .

### 1.1 Einführende Beispiele

Betrachten wir zunächst ein paar Beispiele von Projektionen im  $\mathbb{R}^3$  auf eine Ebene: In Abbildung 1 links sieht man eine Kurve, die die Dimension 1 besitzt, die Projektion dieser Kurve hat ebenfalls die Dimension 1. Ähnlich bei der Fläche in der Mitte, die vor und nach der Projektion Dimension 2 hat. Anders beim Würfel der die Dimension 3 hat, nach der Projektion jedoch nur noch Dimension 2.

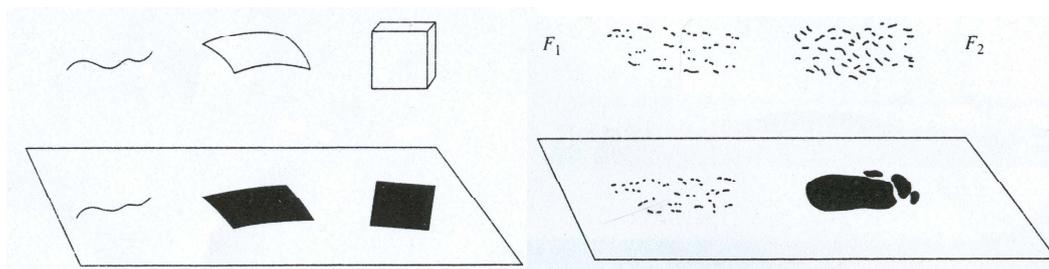


Abbildung 1:  
Projektion klassischer Mengen  
auf eine Fläche

Abbildung 2:  
Projektion fraktaler Mengen  
auf eine Fläche

In Abbildung 2 sehen wir zwei fraktale Mengen:  $F_1$  ist eine fraktale Menge mit  $\dim_H F_1 < 2$ , bei einer solchen Menge bleibt die Dimension im Allgemeinen bei der Projektion erhalten,  $F_2$  ist eine fraktale Menge mit  $\dim_H F_2 > 2$ , deren Projektion die Dimension 2 hat.

### 1.2 Projektionen beliebiger Mengen

Sei  $L_\theta$  eine Ursprungsgerade im  $\mathbb{R}^2$ , die mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\theta$  bildet (wie in Abbildung 3). Die orthogonale Projektion auf  $L_\theta$  bezeichnen wir mit  $\text{proj}_\theta$ .  $F$  sei eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$ .

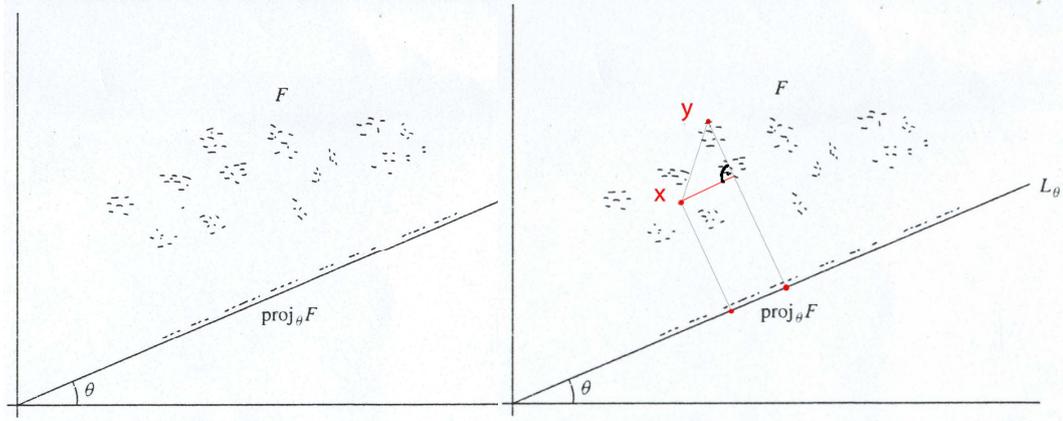


Abbildung 3:  
Projektion fraktaler Mengen  
auf eine Fläche

Abbildung 4:  
Projektion zweier Punkte  
aus der Menge  $F$

Für zwei Punkte  $x, y \in F$  gilt offensichtlich (nach dem Satz des Pythagoras):  $|\text{proj}_\Theta(x) - \text{proj}_\Theta(y)| \leq |x - y|$  (wie in Abbildung 4 veranschaulicht), dh.  $\text{proj}_\Theta$  ist eine Lipschitz Abbildung. Nach Korollar 2.4 [1] gilt:  $\dim_H(\text{proj}_\Theta F) \leq \dim_H F$ , außerdem gilt  $\dim_H(\text{proj}_\Theta F) \leq 1$ , da  $\text{proj}_\Theta F$  eine Teilmenge von  $L_\Theta$  ist. Somit gilt:

$$\dim_H(\text{proj}_\Theta F) \leq \min \{ \dim_H F, 1 \} \quad (1)$$

**Theorem 1.1** (Das Projektionstheorem). *Sei  $F \subset \mathbb{R}^2$  eine Borelmenge*

- (a) *Wenn  $\dim_H(F) \leq 1$ , dann gilt:  $\dim_H(\text{proj}_\theta(F)) = \dim_H(F)$  für fast alle  $\theta \in [0, \pi)$*
- (b) *Wenn  $\dim_H(F) > 1$ , dann hat  $\text{proj}_\theta(F)$  (als Teilmenge von  $L_\theta$ ) positive Länge und hat somit die Dimension 1 für fast alle  $\theta \in [0, \pi)$*

*Beweis.* Für  $s < \dim_H F \leq 1$  existiert nach Theorem 4.13(b) [1] eine Massenverteilung  $\mu$  auf  $F$  mit  $0 < \mu(F) < \infty$  und

$$\int \int \frac{d\mu(x) \cdot d\mu(y)}{|x - y|^s} < \infty \quad (2)$$

Um eine Massenverteilung  $\mu_\theta$  auf  $\text{proj}_\Theta F$  zu bekommen, projiziert man für jedes  $\theta$  die Massenverteilung  $\mu$  auf die Gerade  $L_\theta$ . Daher definiert man  $\mu_\theta$ :

$$\mu_\theta([a, b]) := \mu \left\{ x : a \leq x \cdot \vec{\theta} \leq b \right\}$$

für jedes Intervall  $[a, b]$ , oder äquivalent:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) d\mu_{\theta}(t) = \int_F f(x \cdot \vec{\theta}) d\mu(x) \quad (3)$$

für jede nicht-negative Funktion  $f$ . ( $\vec{\theta}$  sei der Einheitsvektor in Richtung  $\theta$ )  
Dann ist:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu_{\theta}(u) \cdot d\mu_{\theta}(v)}{|u-v|^s} \right] d\theta \\ & \stackrel{(3)}{=} \int_0^{\pi} \left[ \int_F \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(x) \cdot d\mu_{\theta}(v)}{|x \cdot \vec{\theta} - v|^s} \right] d\theta \\ & \stackrel{(3)}{=} \int_0^{\pi} \left[ \int_F \int_F \frac{d\mu(x) \cdot d\mu(y)}{|x \cdot \vec{\theta} - y \cdot \vec{\theta}|^s} \right] d\theta \\ & = \int_0^{\pi} \left[ \int_F \int_F \frac{d\mu(x) \cdot d\mu(y)}{|(x-y) \cdot \vec{\theta}|^s} \right] d\theta \\ & \stackrel{\text{wegen} (*)}{=} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{|\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}|^s} \int_F \int_F \frac{d\mu(x) \cdot d\mu(y)}{|x-y|^s} \end{aligned}$$

für beliebige feste Einheitsvektoren  $\vec{\tau}$ .

$$(*) \quad |(x-y) \cdot \vec{\theta}|^s = |x-y| \cdot |\vec{\theta}| \cdot \cos \angle|^s = |x-y|^s \cdot |\vec{\theta}|^s \cdot |\cos \angle|^s$$

$$(**) \quad |\vec{\theta}|^s \cdot |\cos \angle|^s = |\vec{\theta}|^s \cdot \underbrace{|\vec{\tau}|^s}_{=1} \cdot |\cos \angle|^s = |\vec{\theta} \cdot \vec{\tau}|^s \quad (\text{mit } \vec{\tau} \text{ in } (x-y)\text{-Richtung})$$

gilt in der Gleichung oben auch für ein beliebiges  $\vec{\tau}$ , da der Betrag von Kosinus  $\pi$ -periodisch ist.

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{|\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}|^s} = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\left| \underbrace{|\vec{\tau}|}_{=1} \cdot \underbrace{|\vec{\theta}|}_{=1} \cdot \cos(\tau - \theta) \right|^s} = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{|\cos(\tau - \theta)|^s} < \infty \quad (4)$$

Somit gilt wegen (2) und (4):

$$\int_F \int_F \frac{d\mu_{\theta}(u) \cdot d\mu_{\theta}(v)}{|u-v|^s} < \infty$$

Nach Theorem 4.13(a) [1] gilt:  $\dim_H(\text{proj}_\theta(F)) \geq s$ , für alle  $s < \dim_H(F)$ .  
Auerdem gilt (1), somit:

$$\dim_H(\text{proj}_\theta(F)) = \dim_H(F)$$

für  $\dim_H(F) \leq 1$  □

### 1.3 Projektionen von s-Mengen ganzzahliger Dimension

In diesem Kapitel betrachten wir Projektionen von s-Mengen (Borelmengen mit positiv finitem s-dimensionalem Hausdorffmaß und Hausdorffdimension s).

Betrachten wir also eine 1-Menge  $F \subset \mathbb{R}^2$ , dann besagt das Projektionstheorem 1.1, dass die Projektion einer solchen Menge auf  $L_\theta$  für fast alle  $\theta$  die Dimension 1 besitzt, jedoch wird keine Aussage über die Länge gemacht.

**Theorem 1.2.** *Sei  $F$  eine reguläre 1-Menge im  $\mathbb{R}^2$ .*

*Dann besitzt  $\text{proj}_\theta F$  positive Länge, außer für maximal ein  $\theta \in [0, \pi)$ .*

*Beweis (Kurzbeschreibung).* Aufgrund von Theorem 5.9 [1] genügt es, das Theorem zu beweisen, wenn  $F$  eine Untermenge positiver Länge einer rektifizierbaren Kurve  $C$  ist. Verwendet man das Lebesguesche Dichtetheorem, um ein solches  $F$  durch kurze Unterkurven von  $C$  zu approximieren, dann genügt es, wenn wir den Fall betrachten, in dem  $F$  selbst eine rektifizierbare Kurve  $C_1$  zwischen zwei verschiedenen Punkten  $x$  und  $y$  darstellt. Die Projektion einer solchen Kurve auf ein  $L_\theta$  besitzt eine positive Länge außer für den einen Wert von  $\theta$ , für den die Linie  $L_\theta$  orthogonal auf der Geraden durch  $x$  und  $y$  steht. □

Im Allgemeinen wird eine Projektion  $\text{proj}_\theta F$  für alle  $\theta$  eine positive Länge besitzen. Einen abweichenden Wert wird es nur in dem Fall geben, in dem  $F$  von einer zu  $L_\theta$  orthogonalen Menge von parallelen Liniensegmenten eingeschlossen ist (wie bei  $L_\theta$  in Abbildung 5, die Projektion auf  $L_{\theta'}$  in Abbildung 5 hat positive Länge)

**Theorem 1.3.** *Sei  $F$  eine irreguläre 1-Menge im  $\mathbb{R}^2$ .*

*Dann besitzt die Projektion  $\text{proj}_\theta F$  für fast alle  $\theta \in [0, \pi)$  eine Länge von Null.*

Im Allgemeinen hat eine irreguläre Menge die Länge Null, man kann sich jedoch vorstellen, dass es Mengen gibt die, wie in Abbildung 6, aus unendlich vielen Punkten bestehen, die so verteilt sind, dass die Projektion eine positive Länge hat.

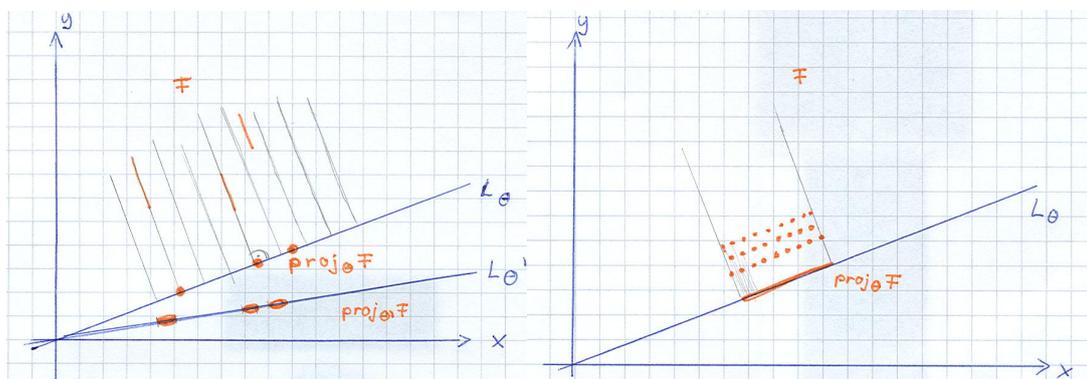


Abbildung 5: Projektion einer regulären 1-Menge

Abbildung 6: Projektion einer irregulären 1-Menge

## 1.4 Projektionen von beliebigen Mengen ganzzahliger Dimension

In den bisherigen Theoremen haben wir keine vollständige Antwort auf die Frage bekommen, ob Projektionen in der Ebene positive Länge oder eine Länge von Null besitzen.

Eine Teilmenge  $F$  des  $\mathbb{R}^2$  mit Hausdorffdimension 1 muss nicht unbedingt eine 1-Menge sein. Für solche Mengen ist jedoch eine mathematische Analyse schwierig, daher zeigen wir, dass es zu jeder dieser Mengen, eine Borel-Menge gibt, für die stellvertretend die Länge bestimmt werden kann.

**Theorem 1.4.** Sei  $G_\theta$  eine Teilmenge von  $L_\theta$  für alle  $\theta \in [0, \pi)$ . Dann existiert eine Borelmenge  $F \subset \mathbb{R}^2$ , so dass:

- (a)  $\text{proj}_\theta F \supset G_\theta \forall \theta$ , und
- (b)  $\text{length}(\text{proj}_\theta F \setminus G_\theta) = 0$

*Beweisidee (iterierten Jalousiekonstruktion).* Sei  $E$  ein Liniensegment der Länge  $\lambda$ .  $\epsilon$  sei ein kleiner Winkel und  $k$  eine große ganze Zahl. Wir ersetzen  $E$  durch  $k$  Liniensegmente der Länge von ungefähr  $\lambda/k$ , wobei jedes Segment um den Winkel  $\epsilon$  zu  $E$  gedreht ist. Diese Menge von Liniensegmenten bezeichnen wir mit  $E_1$ . Wir wiederholen diesen Vorgang mit allen Segmenten von  $E_1$ , um die Menge  $E_2$  zu bilden, welche aus  $k^2$  Segmenten, die jeweils eine Länge von ungefähr  $\lambda/k^2$  haben und zu  $E$  um den Winkel  $2 \cdot \epsilon$  gedreht sind (wie in Abbildung 7(a)). Wir fahren so fort bis wir die Menge  $E_r$  erhalten, die zu  $E$  den Winkel  $r \cdot \epsilon$  hat, dieser Winkel soll ungefähr  $\pi/4$  sein, und deren Segmente ungefähr die Länge  $\lambda/k^r$  haben.

Wenn wir nun die Projektion von  $E_r$  mit der Projektion der ursprünglichen Menge  $E$  vergleichen, so sehen wir, dass die Projektionen der beiden Mengen für  $0 \leq \theta < \pi/2$  nahezu identisch sind. Für  $-\pi/4 < \theta < 0$  besitzt  $\text{proj}_\theta E_r$  eine sehr kleine Länge, da die meisten zu  $L_\theta$  orthogonalen Linien, durch die „schräggestellten Latten der Jalousie“ hindurch gehen (Abbildung 7(b)). Die Projektionen von  $E_r$  sind also in bestimmten Richtungen sehr ähnlich zu denen von  $E$ , während sie in anderen Richtungen fast verschwinden. Diese Idee kann nun benutzt werden, um Mengen zu gewinnen, deren Projektionen in einem bestimmten schmalen Projektionswinkel fast das gesamte  $G_\theta$  abdecken, die aber für andere Winkel gegen Null gehen. Durch Vereinigung solcher Mengen erhalten wir eine Menge mit den geforderten Eigenschaften.  $\square$

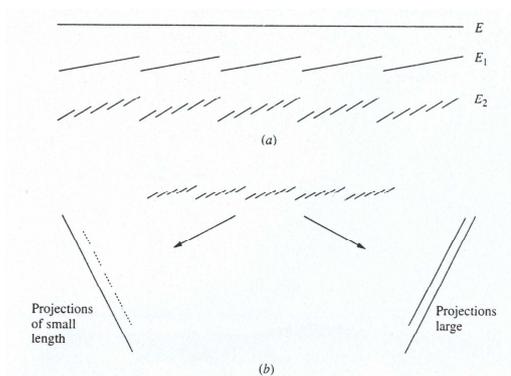


Abbildung 7: Abbildung zum iterierten Jalousiebeweis

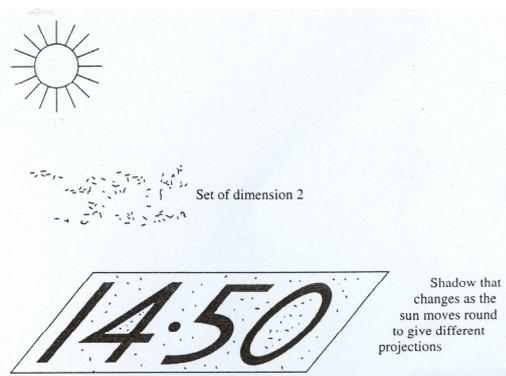


Abbildung 8: Fraktale Sonnenuhr



Abbildung 9: Sonnenuhr im Sonnenuhrenpark Glenk



Abbildung 10: kleine Taschensonnenuhr

Diese Konstruktion kann auf höhere Dimensionen übertragen werden. Insbesondere ist es möglich im  $\mathbb{R}^3$  eine Menge zu finden, deren Schatten Ziffern darstellen, die sich mit dem Projektionswinkel (dem Stand der Sonne) ändern. So erhält man eine digitale Fraktale Sonnenuhr (Abbildung 8)

Eine solche digitale Sonnenuhr wurde tatsächlich 1994 gebaut. Die Erfinder der Sonnenuhr waren Werner Krotz-Vogel, Hans und Daniel Scharstein [2]. In Abbildung 9 sieht man die große digitale Sonnenuhr, die im Sonnenuhrenpark in Glenk (Belgien) steht, in Abbildung 10 sieht man eine kleine digitale Taschensonnenuhr.

## 2 Produkte von Fraktalen

In diesem Kapitel befassen wir uns mit Produkten von Fraktalen. Diese sind eine interessante Möglichkeit, neue Fraktale aus alten zu gewinnen. Insbesondere interessieren wir uns dafür, wie die Dimensionen der Ausgangsmengen mit der Dimension der Produktmenge zusammenhängen.

### 2.1 Einführung

Sei  $E \in \mathbb{R}^n$  und  $F \in \mathbb{R}^m$ . Dann ist das (Kartesische) Produkt der beiden Mengen definiert als:

$$E \times F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : x \in E, y \in F\}$$

In Abbildung 11 sieht man das Produkt aus dem Einheitsintervall  $E$  im  $\mathbb{R}$  und dem Einheitsintervall  $F$  im  $\mathbb{R}^2$ , diese Produktmenge bildet ein Einheitsquadrat im  $\mathbb{R}^3$ . Abbildung 12 zeigt das Produkt zweier Kantoschen Drittelmengen.

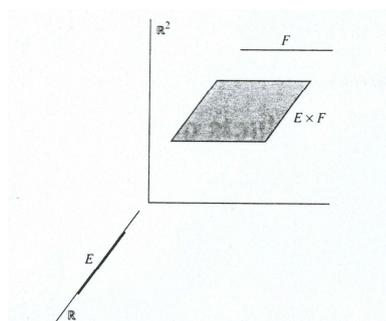


Abbildung 11: Produkt zweier Intervalle

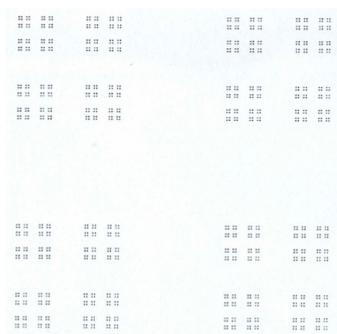


Abbildung 12: Produkt zweier kantorscher Drittelmengen

### 2.2 Produktformeln

Bei der Dimension klassischer Mengen gilt:  $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$ , bei fraktalen Mengen gilt dies jedoch nicht immer. Insbesondere für die Hausdorffdimension kann man hierfür, wie wir später sehen werden, nur eine Ungleichung angeben.

**Satz 2.1.** Seien  $E \in \mathbb{R}^n$  und  $F \in \mathbb{R}^m$  Borelmengen mit  $\mathcal{H}^s(E), \mathcal{H}^t(F) < \infty$ , dann gilt:

$$\mathcal{H}^{s+t}(E \times F) \geq c \cdot \mathcal{H}^s(E) \mathcal{H}^t(F),$$

wobei  $c > 0$  nur von  $s$  und  $t$  abhängt.

*Beweis.* Sei  $E, F \in \mathbb{R}$  (allgemeiner Beweis nahezu identisch)

$\mathcal{H}^s(E)$  oder  $\mathcal{H}^t(F)$  ist Null. Gleichung trivial.

Für  $0 < \mathcal{H}^s(E), \mathcal{H}^t(F) < \infty$  definieren wir eine Massenverteilung  $\mu$  über das Rechteck  $I \times J$  ( $I, J \in \mathbb{R}$ ):

$$\mu(I \times J) := \mathcal{H}^s(E \cap I)\mathcal{H}^t(F \cap J)$$

Es kann gezeigt werden, dass hierdurch eine Massenverteilung  $\mu$  auf  $E \times F$  mit  $\mu(\mathbb{R}^2) = \mathcal{H}^s(E)\mathcal{H}^t(F)$  definiert wird.

Mit Hilfe der Dichteschätzung aus Satz 5.1(b) [1] ergibt sich:

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \mathcal{H}^s(E \cap B(x, r)) \cdot (2r)^{-s} \leq 1 \quad (5)$$

für  $\mathcal{H}^s$ -fast alle  $x \in E$  und

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \mathcal{H}^t(F \cap B(y, r)) \cdot (2r)^{-t} \leq 1 \quad (6)$$

für  $\mathcal{H}^t$ -fast alle  $y \in F$

Da die Scheibe  $B((x,y),r)$  in dem Quadrat  $B(x,r) \times B(y,r)$  enthalten ist gilt:  
 $\mu(B((x,y),r)) \leq \mu(B(x,r) \times B(y,r)) = \mathcal{H}^s(E \cap B(x,r))\mathcal{H}^t(F \cap B(y,r))$ .

Also:

$$\frac{\mu(B((x,y),r))}{(2r)^{s+t}} \leq \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B(x,r))}{(2r)^s} \cdot \frac{\mathcal{H}^t(F \cap B(y,r))}{(2r)^t}$$

Unter Verwendung von (5) und (6) folgt:

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \mu(B((x,y),r))(2r)^{-(s+t)} \leq 1$$

für  $\mu$ -fast alle  $(x,y) \in E \times F$ .

Nach Satz 4.9(a) [1] gilt dann:

$$\mathcal{H}^{s+t}(E \times F) \geq 2^{-(s+t)} \mu(E \times F) = 2^{-(s+t)} \mathcal{H}^s(E) \cdot \mathcal{H}^t(F)$$

□

**Produktformel 2.2.** Seien  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $F \subset \mathbb{R}^m$  Borelmengen, dann gilt:

$$\dim_H(E \times F) \geq \dim_H(E) + \dim_H(F)$$

*Beweis.* Seien  $s, t$  beliebige Zahlen mit  $s < \dim_H(E)$  und  $t < \dim_H(F)$ , also  $\mathcal{H}^s(E), \mathcal{H}^t(F) = \infty$

Theorem 4.10 [1] besagt, dass es Borelmengen  $E_0 \subset E$  und  $F_0 \subset F$  mit  $0 < \mathcal{H}^s(E_0), \mathcal{H}^t(F_0) < \infty$  gibt.

Nach Satz 2.1 gilt:

$$\mathcal{H}^{s+t}(E \times F) \geq \mathcal{H}^{s+t}(E_0 \times F_0) \geq c \cdot \mathcal{H}^s(E_0) \mathcal{H}^t(F_0) > 0$$

Somit ist  $\dim_H(E \times F) \geq s + t$ .

Wählt man  $s$  und  $t$  beliebig nahe an  $\dim_H(E)$  und  $\dim_H(F)$ , so folgt Produktformel 2.2.

□

Die umgekehrte Ungleichung gilt im Allgemeinen nicht. Sie gilt jedoch, wenn die Hausdorffdimension und die obere Boxdimension von  $E$  oder  $F$  übereinstimmen, damit gilt dann Gleichheit.

**Produktformel 2.3.** Für jede Menge  $E \subset \mathbb{R}^n$  und  $F \subset \mathbb{R}^m$  gilt:

$$\dim_H(E \times F) \leq \dim_H(E) + \overline{\dim}_B(F)$$

*Beweis.* Zur Vereinfachung sei  $E \in \mathbb{R}$  und  $F \in \mathbb{R}$ . Man wählt Zahlen  $s$  und  $t$  mit  $s > \dim_H E$  und  $t > \overline{\dim}_B F$ . Dann gibt es eine Zahl  $\delta_0 > 0$ , so dass  $F$  mit  $N_\delta(F) \leq \delta^{-t}$  Intervallen der Länge  $\delta$  für alle  $\delta \leq \delta_0$  überdeckt werden kann. Sei  $\{U_i\}$  eine beliebige  $\delta$ -Überdeckung von  $E$  mit Intervallen, für die gilt:

$$\sum_i |U_i|^s < 1$$

Für jedes  $i$  sei  $U_{i,j}$  eine Überdeckung von  $F$  durch  $N_{|U_i|}(F)$  Intervalle der Länge  $|U_i|$ . Dann ist  $U_i \times F$  durch  $N_{|U_i|}(F)$  Quadrate  $\{U_i \times U_{i,j}\}$  der Seitenlänge  $|U_i|$  überdeckt.

Daher ist  $E \times F \subset \bigcup_i \bigcup_j (U_i \times U_j)$  und somit:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\delta\sqrt{2}}^{s+t}(E \times F) &\leq \sum_i \sum_j |U_i \times U_{i,j}|^{s+t} \leq \sum_i N_{|U_i|}(F) \cdot 2^{(s+t)/2} \cdot |U_i|^{s+t} \\ &\leq 2^{(s+t)/2} \sum_i |U_i|^{-t} |U_i|^{s+t} < 2^{(s+t)/2} \end{aligned}$$

Für  $\delta \rightarrow 0$  ergibt  $\mathcal{H}^{s+t}(E \times F) < \infty$  für alle  $s > \dim_H E$  und  $t > \overline{\dim}_B$ , also ist  $\dim_H(E \times F) \leq s + t$  □

**Korollar 2.4.** Wenn  $\dim_H(F) = \overline{\dim}_B(F)$ , dann gilt:

$$\dim_H(E \times F) = \dim_H(E) + \dim_H(F)$$

*Beweis.* Aus Produktformel 2.2 und 2.3 folgt:

$$\begin{aligned} \dim_H(E) + \dim_H(F) &\leq \dim_H(E \times F) \leq \dim_H(E) + \overline{\dim}_B(F) \\ &= \dim_H(E) + \dim_H(F) \end{aligned}$$

□

Eine nützliche Verallgemeinerung der Produktformel setzt die Dimension einer Menge in Beziehung zu den Dimensionen paralleler Ebenen. Wir bezeichnen im  $\mathbb{R}^2$  die Gerade parallel zur y-Achse durch den Punkt  $(x,0)$  mit  $L_x$ .

**Satz 2.5.** Sei  $F$  eine borelsche Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$ .

Wenn  $1 \leq s \leq 2$  dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{s-1}(F \cap L_x) dx \leq \mathcal{H}^s(F) \quad (7)$$

*Beweis.* Sei  $\epsilon > 0$  und  $\{U_i\}$  eine  $\delta$ -Überdeckung, so dass gilt:

$$\sum_i |U_i|^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(F) + \epsilon$$

$U_i$  ist im Quadrat  $S_i$  der Seitenlänge  $|U_i|$  enthalten, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind (Abbildung 13). Sei  $\chi_i$  Indikatorfunktion von  $S_i$  mit  $\chi_i(x, y) = 1$ , wenn  $(x, y) \in S_i$  und  $=0$  sonst.

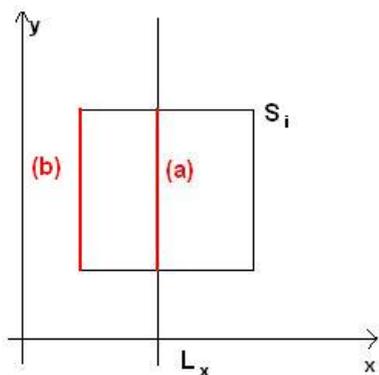


Abbildung 13: (a)  $S_i \cap L_x$   
(b) Seitenlänge  $|U_i|$  des Quadrats  $S_i$

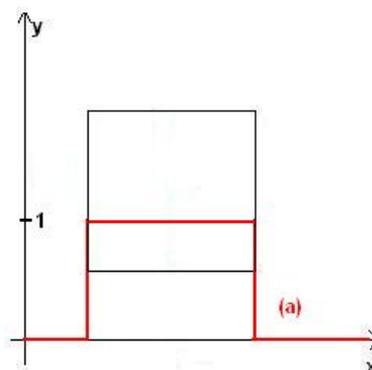


Abbildung 14: (a)  $\chi_i$

Für jedes  $x$  bilden die Mengen  $\{S_i \cap L_x\}$  eine  $\delta$ -Überdeckung von  $F \cap L_x$ , also gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\delta^{s-1}(F \cap L_x) &\leq \sum_i |S_i \cap L_x|^{s-1} \\
&= \sum_i |S_i \cap L_x|^{s-2} \cdot |S_i \cap L_x| \\
&=^{(*)} \sum_i |U_i|^{s-2} |S_i \cap L_x| \\
&=^{(**)} \sum_i |U_i|^{s-2} \int \chi_i(x, y) dy
\end{aligned}$$

(\*) da das Quadrat die Seitenlänge  $|U_i|$  hat. (Abbildung 13)

(\*\*)  $\int \chi_i(x, y) dy$  entspricht der Seitenlänge des Quadrates (Abbildung 14)

Somit:

$$\begin{aligned}
\int \mathcal{H}_\delta^{s-1}(F \cap L_x) dx &\leq |U_i|^{s-2} \int \int \chi_i(x, y) dx dy \\
&= |U_i|^{s-2} \cdot |U_i|^2 \\
&= |U_i|^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(F) + \epsilon
\end{aligned}$$

Da  $\epsilon > 0$  beliebig, gilt:  $\int \mathcal{H}_\delta^{s-1}(F \cap L_x) dx \leq \mathcal{H}_\delta^s(F)$   
Lässt man  $\delta$  gegen Null gehen folgt Ungleichung (7).

□

**Korollar 2.6.** Sei  $F$  eine borelsche Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$ .

Dann gilt für fast alle  $x$ :

$$\dim_H(F \cap L_x) \leq \max\{0, \dim_H(F) - 1\}$$

*Beweis.* Sei  $s > \dim_H(F)$ , so dass:  $\mathcal{H}^s(F) = 0$

Wenn  $s > 1$  ist ergibt Satz 2.5:  $\mathcal{H}^{s-1}(F \cap L_x) = 0$  und damit ist  $\dim_H(F \cap L_x) \leq s - 1$ , für fast alle  $x$ .

□

Zum Schluss noch eine weitere nützliche Verallgemeinerung:

**Satz 2.7.** Sei  $F$  eine beliebige Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  und sei  $E$  eine Teilmenge der  $x$ -Achse. Angenommen, dass es eine Konstante  $c$  gibt, so dass  $\mathcal{H}^t(F \cap L_x) \geq c$  für alle  $x \in E$

Dann gilt:

$$\mathcal{H}^{s+t}(F) \geq b \cdot c \cdot \mathcal{H}^s(E)$$

wobei  $b > 0$  nur von  $s$  und  $t$  abhängt.

## 3 Referenzen

### Literatur

- [1] K.J.Falconer, Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications, 2nd Edition, Wiley, 2003
- [2] DigitalSundails, <http://www.digitalsundial.com/>