

# Fraktale Geometrie: Julia Mengen

Gunnar Völkel

1. Februar 2007

## **Zusammenfassung**

Diese Ausarbeitung ist als Stoffsammlung für das Seminar „Fraktale Geometrie“ im Wintersemester 2006/2007 an der Universität Ulm entstanden. Im Wesentlichen ist es eine Übersetzung des Kapitels über Julia-Mengen aus dem Buch „Fractal Geometry - Mathematical foundations and applications“ ([Fal03]) ergänzt durch einige Ideen aus „Chaos and fractals. New frontiers of science“ ([PJS04]). Behandelt werden Definitionen und Eigenschaften der Julia-Menge. Anschließend wird der Zusammenhang mit der Mandelbrot-Menge und der Fundamentalsatz der Mandelbrot-Menge betrachtet. Schließlich werden noch Möglichkeiten skizziert, wie man Bilder der beiden Mengen mit einem Computer berechnen kann.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Allgemeine Theorie der Julia-Mengen</b>	<b>3</b>
1.1	Definitionen . . . . .	3
1.2	Eigenschaften von Julia-Mengen . . . . .	4
1.3	Alternative Definition von Julia-Mengen . . . . .	5
1.4	Charakterisierung über abstoßende, periodische Punkte . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Quadratische Funktionen &amp; Die Mandelbrot-Menge</b>	<b>9</b>
2.1	Normalform $f_c$ . . . . .	9
2.2	Fundamentaler Satz der Mandelbrot-Menge . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Julia-Mengen von quadratischen Funktionen</b>	<b>11</b>
3.1	Motivation . . . . .	11
3.2	Form der Julia-Menge abhängig von $c$ . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Computergenerierte Bilder</b>	<b>13</b>
4.1	Prinzipielles Verfahren . . . . .	13
4.2	Julia-Menge . . . . .	13
4.3	Mandelbrot-Menge . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Einige Bilder</b>	<b>14</b>
5.1	Mandelbrot-Menge . . . . .	14
5.2	Julia-Menge . . . . .	15
	<b>Literatur</b>	<b>15</b>

# 1 Allgemeine Theorie der Julia-Mengen

## 1.1 Definitionen

**Definition 1.1 (Polynom)** Eine Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  der Form

$$f(z) = \sum_{i=1}^n a_n z^n, \quad a_n \neq 0$$

mit komplexen Koeffizienten  $(a_0, \dots, a_n)$  heißt **Polynom**.

**Bemerkung 1.2** Im Folgenden ist  $f$  ein Polynom vom Grad  $n \geq 2$ . Mit kleinen Änderungen gilt die nachfolgende Theorie auch noch, wenn  $f$  eine rationale Funktion  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  ( $p, q$  Polynome) auf der komplexen Kugel  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Vieles gilt auch für meromorphe Funktionen (Funktionen, die auf  $\mathbb{C}$  analytisch sind mit Ausnahme von isolierten Punkten.).

**Definition 1.3 (Julia-Menge)** Die **ausgefüllte Julia-Menge** des Polynoms  $f$  ist definiert als

$$\mathcal{K}(f) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \not\rightarrow \infty\}$$

für ausreichend großes  $k$ , wobei  $f^k$  die  $k$ -fache Komposition von  $f$  ist. Die **Julia-Menge** von  $f$  ist der Rand der ausgefüllten Julia-Menge ( $\mathcal{J}(f) = \partial\mathcal{K}(f)$ ). Wenn  $f$  aus dem Kontext klar ist, wird die Schreibweise wie folgt abgekürzt:  $\mathcal{J} = \mathcal{J}(f)$ ,  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(f)$ .

**Bemerkung 1.4**  $z \in \mathcal{J}(f) \Rightarrow$  In jeder Nachbarschaft von  $z$  gibt es Punkte  $w$  und  $v$  mit  $f^k(w) \rightarrow \infty$  und  $f^k(v) \not\rightarrow \infty$ . Die Komplementmenge der Julia-Menge wird „Fatou“-Menge  $\mathcal{F}(f)$  genannt.

Man betrachte zunächst das Beispiel  $f(z) = z^2$ . Es gilt  $f^k(z) = z^{2^k}$ . Daraus ergibt sich, dass:

$$\begin{aligned} f^k(z) &\rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) && \text{für } |z| < 1 \\ f^k(z) &\rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty) && \text{für } |z| > 1 \end{aligned}$$

Für  $|z| = 1$  bleibt  $f^k(z)$  auf dem Einheitskreis. Also ist  $\mathcal{K}(f)$  die Einheitskreisscheibe  $|z| \leq 1$ . Die Julia-Menge  $\mathcal{J}(f)$  ist der Einheitskreis  $|z| = 1$ . In diesem Spezialfall ist  $\mathcal{J}$  kein Fraktal.

Im Folgenden betrachten wir  $f(z) = z^2 + c$  mit einer kleinen komplexen Zahl  $c \in \mathbb{C}$ . Es ist leicht zu sehen, dass immernoch gilt:

$$\begin{aligned} f^k(z) &\rightarrow w, \text{ wenn } z \text{ klein ist, mit } w \text{ als Fixpunkt von } f \text{ nahe } 0 \\ \text{und } f^k(z) &\rightarrow \infty, \text{ für große } z \end{aligned}$$

Es zeigt sich, dass  $\mathcal{J}$  eine fraktale Kurve ist.

**Definition 1.5 (Fixpunkt, periodischer Punkt)** Gilt  $f(w) = w$ , dann heißt  $w$  ein **Fixpunkt von  $f$** . Wenn  $f^p(w) = w$  für ein  $p \geq 1$  gilt, dann heißt  $w$  ein **periodischer Punkt von  $f$** . Solch ein  $p$  heißt **Periode von  $w$** .  $w, f(w), \dots, f^{p-1}(w)$  heißt **Periode  $p$  Orbit**.

**Definition 1.6 (anziehend, abstoßend)** Sei  $w$  ein periodischer Punkt mit Periode  $p$  und  $(f^p)'(w) = \lambda$ .  $w$  heißt **anziehend**, wenn  $0 \leq |\lambda| < 1$ . In diesem Fall werden nahe Punkte an das Orbit angezogen (durch Iteration von  $f$ ).  $w$  heißt **abstoßend**, wenn  $|\lambda| > 1$ . In diesem Fall bewegen sich die Punkte nahe dem Orbit weg.

**Lemma 1.7 (Divergenzlemma)** Sei  $f(z) = \sum_{j=1}^n a_j z^j$  mit  $a_n \neq 0$ . Dann gilt:

$$\exists r \in \mathbb{R} : |z| \geq r \Rightarrow |f(z)| \geq 2|z|$$

Insbesondere: Wenn  $|f^m(z)| \geq r$  für ein  $m \geq 0$ , dann  $f^k(z) \rightarrow \infty (k \rightarrow \infty)$ . Folglich gilt: Entweder  $f^k(z) \rightarrow \infty$  oder  $\{f^k(z) : k = 0, 1, 2, \dots\}$  ist eine beschränkte Menge.

Beweis: Sei  $r$  ausreichend groß gewählt, so dass aus  $|z| \geq r$  folgt:  $\frac{1}{2}|a_n||z|^n \geq 2|z|$  und  $(|a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + |a_1||z| + |a_0|) \leq \frac{1}{2}|a_n||z|^n$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} |z| \geq r &\Rightarrow |f(z)| = |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0| \\ &\geq |a_n||z|^n - |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0| \\ &\geq |a_n||z|^n - (|a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + |a_1||z| + |a_0|) \\ &\geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n \geq 2|z| \end{aligned}$$

Weiterhin gilt: Wenn  $|f^m(z)| \geq r$  für ein  $m$ , dann folgt aus induktiver Anwendung, dass

$$|f^{m+k}(z)| \geq 2^k |f^m(z)| \geq r \Rightarrow f^k(z) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

□

## 1.2 Eigenschaften von Julia-Mengen

**Satz 1.8** Sei  $f(z)$  ein Polynom. Dann sind die ausgefüllte Julia-Menge  $\mathcal{K}(f)$  und die Julia-Menge  $\mathcal{J}(f)$  nicht-leer und kompakt mit  $\mathcal{J}(f) \subset \mathcal{K}(f)$ . Fernerhin hat  $\mathcal{J}(f)$  ein leeres Inneres.

Beweis: Mit dem  $r$  aus Lemma 1.7 folgt sofort, dass  $\mathcal{K}$  in der Scheibe  $B(0, r)$  enthalten und somit beschränkt ist. Somit ist auch  $\mathcal{J} = \partial\mathcal{K}$  beschränkt.

$z \notin \mathcal{K} \Rightarrow f^k(z) \rightarrow \infty$  also ist  $|f^m(z)| > r$  für ein  $m$ . Aus der Stetigkeit von  $f^m$  folgt  $|f^m(w)| > r$  für alle  $w$  in einer ausreichend kleinen Umgebung von  $z$ . Für solche  $w$  gilt  $f^k(w) \rightarrow \infty$  nach Lemma 1.7  $\Rightarrow w \notin \mathcal{K}$ .

- $\Rightarrow$  Das Komplement von  $\mathcal{K}$  ist offen, somit ist  $\mathcal{K}$  abgeschlossen
- $\Rightarrow$  Der Rand von  $\mathcal{K}$ , die Julia-Menge  $\mathcal{J}$  ist abgeschlossen und in  $\mathcal{K}$  enthalten.
- $\Rightarrow \mathcal{K}$  und  $\mathcal{J}$  sind abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.

Die Gleichung  $f(z) = z$  hat mindestens eine Lösung  $z_0$ , so dass  $f^k(z_0) = z_0 \forall k$ .

$$\Rightarrow z_0 \in \mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{K} \neq \emptyset$$

Sei  $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$ . Dann liegt der Punkt  $\lambda z_0 + (1 - \lambda)z_1$  auf der Verbindungslinie von  $z_0$  und  $z_1$  und damit für ein  $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$  auf dem Rand von  $\mathcal{K}$ . Beispielsweise für  $\lambda^* := \inf\{\lambda : \lambda z_0 + (1 - \lambda)z_1 \in \mathcal{K}\}$  gilt dies.

$$\mathcal{J} = \partial\mathcal{K} \neq \emptyset$$

Wäre das Innere von  $\mathcal{J}$  nicht-leer, dann gäbe es eine offene, nicht-leere Teilmenge  $U \subset \mathcal{J} \subset \mathcal{K}$ , die dann auch im Inneren von  $\mathcal{K}$  liegt. Diese hätte dann einen leeren Schnitt mit dessen Rand  $\mathcal{J}$ . Widerspruch!

□

**Satz 1.9 (Invarianz der Julia-Menge)** Die Julia-Menge  $\mathcal{J} = \mathcal{J}(f)$  von  $f$  ist vorwärts und rückwärts invariant unter  $f$ , das heißt  $\mathcal{J} = f(\mathcal{J}) = f^{-1}(\mathcal{J})$ .

Beweis: Sei  $z \in \mathcal{J}$ . Dann folgt  $f^k(z) \rightarrow \infty$ . Man kann eine Folge  $w_n \rightarrow z$  finden mit  $f^k(w_n) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty \forall n$ .

$$\Rightarrow f^k(f(z)) \rightarrow \infty \text{ und } f^k(f(w_n)) \rightarrow \infty$$

Aufgrund der Stetigkeit von  $f$  kann  $f(w_n)$  so nah an  $f(z)$  gewählt werden wie benötigt.

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(z) \in \mathcal{J} &\Rightarrow f(\mathcal{J}) \subset \mathcal{J} \\ \Rightarrow \mathcal{J} \subset f^{-1}(f(\mathcal{J})) &\subset f^{-1}(\mathcal{J}) \end{aligned}$$

Mit  $z$  und  $w_n$  wie oben gewählt folgt: Wenn  $f(z_0) = z$ , dann kann man eine Folge  $v_n \rightarrow z_0$  finden mit  $f(v_n) = w_n$  (aufgrund der Abbildungseigenschaften von Polynomen in  $\mathbb{C}$ ). Somit gilt:

$$\begin{aligned} f^k(z_0) &= f^{k-1}(z) \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty) \\ \text{und } f^k(v_n) &= f^{k-1}(w_n) \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty) \\ &\Rightarrow z_0 \in \mathcal{J} \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{J}) \subset \mathcal{J} \\ &\Rightarrow \mathcal{J} = f(f^{-1}(\mathcal{J})) \subset f(\mathcal{J}) \end{aligned}$$

□

### Satz 1.10 (Julia-Menge von Kompositionen)

$$\forall p \in \mathbb{N}, p \geq 1 : \mathcal{J}(f^p) = \mathcal{J}(f)$$

*Beweis:* Aus Lemma 1.7 folgt, dass  $f^k(z) \rightarrow \infty$  genau dann, wenn  $(f^p)^k(z) = f^{p \cdot k}(z) \rightarrow \infty$ . Somit haben  $f$  und  $f^p$  identische ausgefüllte Julia-Mengen und damit auch identische Julia-Mengen

□

## 1.3 Alternative Definition von Julia-Mengen

**Definition 1.11 (normal)** Sei eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}$  gegeben. Sei  $g_k : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  eine Familie von komplexen analytischen Funktionen (d.h. differenzierbar auf  $U$ ).

Die Familie  $\{g_k\}$  heißt **normal auf  $U$** , wenn jede Folge von Funktionen aus  $\{g_k\}$  eine Teilfolge hat, die gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von  $U$  konvergiert entweder gegen eine beschränkte analytische Funktion oder gegen  $\infty$ .

Die Familie  $\{g_k\}$  ist **normal im Punkt  $w \in U$** , wenn eine offene Teilmenge  $V \subset U$ ,  $w \in V$  existiert, so dass  $\{g_k\}$  eine normale Familie auf  $V$  ist. (äquivalent: Es existiert eine Umgebung  $V$  von  $w$ , in der jede Folge  $\{g_k\}$  eine Teilfolge hat, die gegen eine beschränkte analytische Funktion oder gegen  $\infty$  konvergiert.

**Satz 1.12 (Satz von Montel)** Sei  $\{g_k\}$  eine Familie komplexer analytischer Funktionen auf einer offenen Menge  $U$ . Wenn  $\{g_k\}$  keine normale Familie ist, dann gilt für alle  $w \in \mathbb{C}$  mit maximal einer Ausnahme, dass  $g_k(z) = w$  für ein  $z \in U$  und ein  $k$ .

*Beweis:* Siehe Literatur zu komplexer Funktionentheorie

□

### Satz 1.13 (alternative Definition der Julia-Menge)

$$\mathcal{J}(f) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Die Familie } \{f^k\} \text{ ist nicht normal in } z\} \quad (1.1)$$

*Beweis:* Wenn  $z \in \mathcal{J}$ , dann gibt es in jeder Umgebung  $V$  von  $z$  Punkte  $w$ , derart dass  $f^k(w) \rightarrow \infty$ , während  $f^k(z)$  beschränkt bleibt. Damit ist keine Teilfolge von  $\{f^k\}$  gleichmäßig konvergent auf  $V$ , so dass  $\{f^k\}$  nicht normal in  $z$  ist.

Angenommen  $z \notin \mathcal{J}$ . Dann gilt es zwei Fälle zu unterscheiden:

1.  $z \in \mathring{\mathcal{K}}$ : Sei  $V \subset \mathring{\mathcal{K}}$  eine offene Menge mit  $z \in V$ . Es gilt  $f^k(w) \in \mathcal{K} \forall w \in V \forall k$ . Nach dem Satz von Montel (Satz 1.12) ist  $\{f_k\}$  normal in  $w$ .
2.  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$ , so dass  $|f^k(z)| > r$  für ein  $k$ , wobei  $r$  durch Lemma 1.7 gegeben ist, so dass  $|f^k(w)| > r$  für alle  $w$  in einer Umgebung  $V$  von  $z$ . Nach Lemma 1.7 folgt  $f^k(w) \rightarrow \infty$  gleichmäßig auf  $V$ . Damit folgt, dass  $\{f^k\}$  in  $w$  normal ist.

□

**Bemerkung 1.14 (Rationale Funktionen)** Der Ausdruck (1.1) wird als Definition von Julia-Mengen für allgemeine Funktionen verwendet (z.B. rationale oder meromorphe Funktionen).

Man beachte:

Sei  $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  eine rationale Funktion, dann muss  $\mathcal{J}$  abgeschlossen sein, aber es muss nicht beschränkt sein. Es ist möglich, dass  $\mathcal{J}$  die ganze komplexe Zahlenebene umfasst, z.B. wenn  $f(z) = \left(\frac{z-2}{z}\right)^2$ .

**Lemma 1.15** Sei  $f$  ein Polynom. Sei  $w \in \mathcal{J}(f)$  und  $U$  eine Umgebung von  $w$ . Dann gilt: Für alle  $j = 1, 2, \dots$  ist die Menge  $W \equiv \bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(U)$  ganz  $\mathbb{C}$  mit Ausnahme von maximal einem möglichen isolierten Punkt. Jede solche Ausnahme ist nicht in  $\mathcal{J}(f)$  und ist unabhängig von  $w$  und  $U$ .

Beweis: Nach Satz 1.13 ist die Familie  $\{f^k\}_{k=j}^{\infty}$  nicht normal in  $w$ . Damit folgt sofort der erste Teil nach Satz von Montel (1.12).

Angenommen  $v \notin W$ : Falls  $f(z) = v$ , dann folgt  $z \notin W$ , da  $f(W) \subset W$ . Da  $\mathbb{C} \setminus W$  nur maximal aus einem Punkt besteht, folgt  $z = v$ .

Somit gilt, dass  $f$  ein Polynom vom Grad  $n$  ist, so dass  $v$  die einzige Lösung für  $f(z) - v = 0$  ist.

$$f(z) - v = c(z - v)^n \quad \text{für eine Konstante } c$$

Wenn  $z$  ausreichend nah zu  $v$  ist, dann gilt:

$$f^k(z) - v \xrightarrow{\text{glm}} 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

auf  $\{z : |z - v| < (2c)^{-\frac{1}{n-1}}\}$ . Damit ist  $\{f^k\}$  normal in  $v$ , also ist  $v$  der Ausnahmepunkt  $v \notin \mathcal{J}(f)$ .  $v$  hängt nur vom Polynom  $f$  ab.

(Tatsächlich gilt: Wenn  $W$  einen Punkt  $v \in \mathbb{C}$  auslässt, dann ist  $\mathcal{J}(f)$  der Kreis mit Mittelpunkt  $v$  und Radius  $c^{-\frac{1}{n-1}}$ .)

□

**Bemerkung 1.16 (Interpretation von Lemma 1.15)** Anschaulich beschreibt Lemma 1.15, dass die Umgebung eines Punktes der Julia-Menge  $\mathcal{J}(f)$  auf ganz  $\mathbb{C}$  abgebildet wird unter den Iterierten  $f^k$  von  $f$ .

**Lemma 1.17 (Generierungslemma)** (a) Das folgende gilt für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit maximal einer Ausnahme:

Wenn  $U$  eine offene Menge ist die  $\mathcal{J}(f)$  schneidet, dann schneidet  $f^{-k}(z)U$  für unendlich viele Werte von  $k$ .

$$(b) \quad z \in \mathcal{J}(f) \implies \mathcal{J}(f) \text{ ist der Abschluss von } \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$$

Beweis: (a) Vorausgesetzt  $z$  ist nicht der Ausnahmepunkt aus Lemma 1.15, dann ist  $z \in f^k(U)$  und damit folgt:  $f^{-k}(z)$  schneidet  $U$  für unendlich viele  $k$ .

(b)

$$z \in \mathcal{J}(f) \implies f^{-k}(z) \subset \mathcal{J}(f) \quad \text{nach Satz 1.9}$$

Somit ist auch  $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$  und auch sein Abschluss in der abgeschlossenen Menge  $\mathcal{J}(f)$  enthalten.

Andererseits: Sei  $z \in \mathcal{J}(f)$ . Sei  $U$  eine offene Menge mit  $z \in U$ , dann schneidet  $f^{-k}(z)U$  für ein  $k$  nach Teil (a).

$z$  kann nicht der Ausnahmepunkt aus Lemma 1.15 sein. Damit folgt, dass  $z$  im Abschluss von  $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$  ist.

□

**Satz 1.18**  $\mathcal{J}(f)$  ist eine perfekte Menge (d.h. abgeschlossen und ohne isolierte Punkte) und daher nicht abzählbar.

*Beweis:* Sei  $v \in \mathcal{J}(f)$  und  $U$  eine Umgebung von  $v$ . Es gilt zu zeigen, dass  $U$  andere Punkte von  $\mathcal{J}(f)$  enthält. Es müssen 3 Fälle unterschieden werden:

- (i)  $v$  ist kein Fixpunkt oder periodischer Punkt von  $f$ . Nach Lemma 1.17(b) und Satz 1.9 enthält  $U$  einen Punkt von  $f^{-k}(v) \subset \mathcal{J}(f)$  für ein  $k \geq 1$  und dieser Punkt muss von  $v$  verschieden sein.
- (ii)  $f(v) = v$ . Wenn  $f(z) = v$  keine andere Lösung als  $v$  hat, dann folgt wie im Beweis von Lemma 1.15, dass  $v \notin \mathcal{J}(f)$ .  
Also existiert  $w, w \neq v$  und  $f(w) = v$ . Nach Lemma 1.17(b) enthält  $U$  einen Punkt  $u$  von  $f^{-k}(w) = f^{-k-1}(v)$  für ein  $k \geq 1$ . Jedes solche  $u$  ist in  $\mathcal{J}(f)$  aufgrund der rückwärts Invarianz und ist ungleich  $v$ , da  $f^k(v) = v \neq w = f^k(u)$ .
- (iii)  $f^p(v) = v$  für ein  $p > 1$ . Nach Satz 1.10 gilt  $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(f^p)$ . Nach Anwendung von (ii) auf  $f^p$  sieht man, dass  $U$  Punkte von  $\mathcal{J}(f^p) = \mathcal{J}(f)$  enthält, die von  $v$  verschieden sind.

Damit hat  $\mathcal{J}(f)$  keine isolierten Punkte. Da  $\mathcal{J}(f)$  auch abgeschlossen ist, ist es perfekt. Jede perfekte Menge ist nicht abzählbar. □

## 1.4 Charakterisierung über abstoßende, periodische Punkte

**Satz 1.19** Ist  $f$  ein Polynom, dann ist  $\mathcal{J}(f)$  der Abschluss der abstoßenden periodischen Punkte von  $f$ .

*Beweis:* Sei  $w$  ein abstoßender periodischer Punkt von  $f$  mit der Periode  $p$ . Dann ist  $w$  ein abstoßender Fixpunkt von  $g = f^p$ . Angenommen  $\{g^{k_i}\}$  ist normal in  $w$ , dann hat  $w$  eine offene Umgebung  $V$ , auf welcher eine Teilfolge  $\{g^{k_i}\}$  gegen eine endliche analytische Funktion  $g_0$  konvergiert. (Sie kann nicht gegen  $\infty$  konvergieren, da  $g^k(w) = w \forall k$ .) Aus den Grundlagen der komplexen Analysis folgt, dass die Ableitungen auch konvergieren:

$$(g^{k_i})'(z) \rightarrow g_0'(z), \text{ wenn } z \in V$$

Nach der Kettenregel gilt

$$\left| (g^{k_i})'(w) \right| = \left| (g'(w))^{k_i} \right| \rightarrow \infty$$

da  $w$  ein abstoßender Fixpunkt ist ( $|g'(w)| > 1$ ). Dies ist ein Widerspruch zur Endlichkeit von  $g_0'(w)$ , somit kann  $\{g^k\}$  in  $w$  nicht normal sein.

$$\implies w \in \mathcal{J}(g) = \mathcal{J}(f^p) = \mathcal{J}(f) \text{ nach Satz 1.10}$$

Da  $\mathcal{J}(f)$  abgeschlossen ist, folgt dass der Abschluss der abstoßenden periodischen Punkte in  $\mathcal{J}(f)$  ist.

Sei  $E = \{w \in \mathcal{J}(f) : \exists v \neq w, f(v) = w \wedge f'(v) \neq 0\}$ . Angenommen  $w \in E$ . Dann gibt es eine offene Umgebung  $V$  von  $w$  auf der man ein lokal analytisches Inverses  $f^{-1} : V \rightarrow \mathbb{C} \setminus V$  finden kann, so dass  $f^{-1}(w) = v \neq w$ . Sei  $\{h_k\}$  eine Familie von analytischen Funktionen auf  $V$  mit

$$h_k(z) = \frac{f^k(z) - z}{f^{-1}(z) - z}$$

Sei  $U$  eine beliebige offene Umgebung von  $w$  mit  $U \subset V$ . Da  $w \in \mathcal{J}(f)$ , ist die Familie  $\{f^k\}$  und damit auch die Familie  $\{h_k\}$  nicht normal auf  $U$ . Aus dem Satz von Montel 1.12 folgt, dass  $h_k(z)$  entweder den Wert 0 oder 1 für ein  $k$  und  $z \in U$  annehmen muss.

Im ersten Fall ist  $f^k(z) = z$  für ein  $z \in U$ . Im zweiten Fall ist  $f^k(z) = f^{-1}(z)$ , so dass  $f^{k+1}(z) = z$  für ein  $z \in U$ . Somit enthält  $U$  einen periodischen Punkt von  $f$ . Daraus folgt, dass  $w$  im Abschluss der abstoßenden periodischen Punkte ist für alle  $w \in E$ . Da  $f$  ein Polynom ist, enthält  $E$  alles von  $\mathcal{J}(f)$  außer einer endlichen Anzahl von Punkten. Weil  $\mathcal{J}(f)$  keine isolierten Punkte enthält (nach Satz 1.18) gilt  $\mathcal{J}(f) \subset \bar{E}$  ist eine Teilmenge des Abschlusses der abstoßenden periodischen Punkte.

□

**Bemerkung 1.20** Satz 1.19 ist das wichtigste Resultat dieses Abschnitts. Er wird für die Darstellung von Julia-Mengen per Computer verwendet. Mehr dazu später.

**Definition 1.21 (Anziehungsbereich)** Wenn  $w$  ein anziehender Fixpunkt ist, dann ist

$$A(w) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} w\}$$

der Anziehungsbereich von  $w$ . Diese Definition gilt genauso für  $A(\infty)$ .

**Bemerkung 1.22** Da  $w$  anziehend ist, gibt es eine offene Menge  $V$  in  $A(w)$ , die  $w$  enthält (für  $w = \infty$  nehme man  $\{z : |z| > r\}$  für ausreichend großes  $r$ ). Daraus folgt, dass  $A(w)$  offen ist, da aus  $f^k(z) \in V$  für ein  $k$  folgt, dass  $z \in f^{-k}(V)$ , welches offen ist. Die folgende Charakterisierung von  $\mathcal{J}$  als der Rand aller Anziehungsbereiche ist sehr nützlich beim Bestimmen von Julia-Mengen.

**Lemma 1.23** Sei  $w$  ein attraktiver Fixpunkt von  $f$ . Dann gilt:  $\partial A(w) = \mathcal{J}(f)$ . Das gilt auch, wenn  $w = \infty$ .

Beweis: Wenn  $z \in \mathcal{J}(f)$ , dann gilt:  $f^k(z) \in \mathcal{J}(f) \forall k$ .  $f^k(z)$  kann also nicht gegen einen attraktiven Fixpunkt konvergieren.

$$\Rightarrow z \notin A(w)$$

Wenn  $U$  eine Umgebung von  $z$  ist, dann enthält die Menge  $f^k(U)$  Punkte von  $A(w)$  für ein  $k$  (nach Lemma 1.15). Also gibt es Punkte beliebig nah zu  $z$ , die gegen  $w$  iterieren.

$$\Rightarrow z \in \overline{A(w)} \Rightarrow z \in \partial A(w)$$

Angenommen  $z \in \partial A(w)$ , aber  $z \notin \mathcal{J}(f)$ . Dann hat  $z$  eine zusammenhängende offene Umgebung  $V$ , auf welcher  $\{f^k\}$  eine Teilfolge hat, die entweder gegen eine analytische Funktion oder gegen  $\infty$  geht. Die Teilfolge konvergiert gegen  $w$  auf  $V \cap A(w)$  (welche offen und nicht-leer ist) und damit auch auf  $V$ , da eine analytische Funktion konstant ist auf einer zusammenhängenden Menge, wenn sie konstant auf irgendeiner offenen Teilmenge ist. Alle Punkte von  $V$  werden nach  $A(w)$  abgebildet durch die Iterationen von  $f$ , so dass  $V \subset A(w)$ . Dies ist im Widerspruch zu  $z \in \partial A(w)$ .

□

**Bemerkung 1.24 (Beispiel)** Sei  $f(z) = z^2$ . Dann ist  $\mathcal{J}(f)$  der Einheitskreis. Dieser ist der Rand von  $A(0)$  und der Rand von  $A(\infty)$ .

**Satz 1.25 (Zusammenfassung: Eigenschaften von Julia-Mengen)** Sei  $\mathcal{J}(f)$  die Julia-Menge vom Polynom  $f$ , dann gilt:

- $\mathcal{J}(f) = \partial \left\{ z \in \mathbb{C} : f^k(z) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty \right\}$
- $\mathcal{J}(f)$  ist eine nicht-abzählbare, nicht-leere, kompakte Menge, die keine isolierten Punkte enthält.
- $\mathcal{J}(f)$  ist invariant unter  $f$  und  $f^{-1}$ .
- $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(f^p) \forall p \in \mathbb{N}, p > 0$
- $z \in \mathcal{J}(f) \implies \mathcal{J}(f) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)}$
- $\mathcal{J}(f) = \partial A(w) \forall w, w$  anziehender Fixpunkt von  $f$
- $\mathcal{J}(f)$  ist der Abschluss der abstoßenden periodischen Punkte von  $f$ .



## 2 Quadratische Funktionen & Die Mandelbrot-Menge

### 2.1 Normalform $f_c$

Untersucht werden im Folgenden Polynome der Form

$$f_c(z) = z^2 + c$$

Diese Einschränkung ist nicht so gravierend, wie sie auf den ersten Blick aussieht. Sei  $h(z) = \alpha z + \beta$  ( $\alpha \neq 0$ ). Dann gilt:

$$h^{-1}(f_c(h(z))) = \frac{\alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta z + \beta^2 + c - \beta}{\alpha}$$

Indem man passende Werte für  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $c$  wählt, kann man diesen Ausdruck zu jeder gewünschten quadratischen Funktion machen. Es gilt  $h^{-1} \circ f_c \circ h = f$ , also  $h^{-1} \circ f_c^k \circ h = f^k \forall k$ .

Das bedeutet, dass die Glieder der Folge  $\{f^k(z)\}$  eines Punktes  $z$  nur das Bild unter  $h^{-1}$  der Folge  $\{f_c^k(h(z))\}$  eines Punktes  $h(z)$  sind. Die Abbildung  $h$  transformiert das dynamische Bild von  $f$  zu dem von  $f_c$ . Genauer gesagt:

$$f^k(z) \rightarrow \infty \iff f_c^k(h(z)) \rightarrow \infty$$

Deswegen ist die Julia-Menge von  $f$  das Bild unter  $h^{-1}$  der Julia-Menge von  $f_c$ .

**Definition 2.1 (Konjugation)** Die Transformation  $h$  wird **Konjugation zwischen  $f$  und  $f_c$**  genannt.

**Bemerkung 2.2 (zur Konjugation)** Jede quadratische Funktion ist konjugiert zu  $f_c$  für ein passendes  $c$ . Die Resultate der Untersuchungen der Julia-Mengen von  $f_c$  für  $c \in \mathbb{C}$  gelten also für die Julia-Mengen aller quadratischer Polynome. Da  $h$  eine Ähnlichkeitstransformation ist, ist die Julia-Menge jedes quadratischen Polynoms geometrisch ähnlich zu der von  $f_c$  für ein  $c \in \mathbb{C}$ .

**Definition 2.3 (Zweige)**  $f_c^{-1}(z) = \pm\sqrt{z-c}$  werden auch als **zwei Zweige von  $f_c^{-1}(z)$**  bezeichnet ( $z \neq c$ ).

### 2.2 Fundamentaler Satz der Mandelbrot-Menge

**Definition 2.4 (Mandelbrot-Menge)** Die **Mandelbrot-Menge**  $\mathcal{M}$  ist die Menge der Parameter  $c$ , für die die Julia-Menge von  $f_c$  zusammenhängend ist.

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : \mathcal{J}(f_c) \text{ ist zusammenhängend}\}$$

**Definition 2.5 (Schleife)** Eine glatte (d.h. differenzierbare), geschlossene, einfache (d.h. sich nicht selber schneidende) Kurve in der komplexen Zahlenebene heißt **Schleife**.

Die Teilmengen von  $\mathbb{C}$  innerhalb bzw. außerhalb der Kurve heißen **Inneres** bzw. **Äußeres** der Schleife.

Eine glatte, geschlossene Kurve, die sich an einem einzigen Punkt selber schneidet, heißt **Achtschleife**.

**Lemma 2.6 (Abbildungseigenschaften von  $f_c^{-1}$ )** Sei  $C$  eine Schleife in der komplexen Zahlenebene.

- Wenn  $c$  innerhalb von  $C$  ist, dann ist  $f_c^{-1}(C)$  eine Schleife mit dem inversen Bild des Inneren von  $C$  als Inneres von  $f_c^{-1}(C)$ .
- Wenn  $c$  auf  $C$  liegt, dann ist  $f_c^{-1}(C)$  eine Achtschleife mit Schnittpunkt mit sich selbst in  $0$ , so dass das inverse Bild vom Inneren von  $C$  das Innere der zwei Schleifen ist.
- Wenn  $c$  außerhalb von  $C$  ist, dann besteht  $f_c^{-1}(C)$  aus zwei nicht zusammenhängenden Schleifen mit dem inversen Bild des Inneren von  $C$  als Inneres der beiden Schleifen.

**Beweis:** Es gilt  $f_c^{-1}(z) = \pm(z-c)^{\frac{1}{2}}$  und  $(f_c^{-1})'(z) = \pm\frac{1}{2}(z-c)^{-\frac{1}{2}}$ . Man sieht, dass die Ableitung endlich und nicht-null ist für  $z \neq c$ . Somit gilt für jeden der Zweige von  $f_c^{-1}$ , dass die Menge  $f_c^{-1}(C)$  eine lokal glatte Kurve ist, vorausgesetzt  $c \notin C$ .

- (a) Angenommen  $c$  ist innerhalb von  $C$ . Sei  $w$  ein Punkt auf  $C$ . Man lege einen der beiden Werte für  $f_c^{-1}(w)$  fest.  $f_c^{-1}(z)$  ändert sich stetig, wenn  $z$  sich auf  $C$  entlang bewegt. Wenn  $z$  wieder bei  $w$  ankommt, nehme  $f_c^{-1}(w)$  den zweiten Wert an.  $f_c^{-1}(z)$  ist wieder eine glatte Kurve beim zweiten Durchlauf der Schleife  $C$ .

$$c \notin C \Rightarrow 0 \notin f_c^{-1}(C) \Rightarrow f_c'(z) \neq 0 \text{ auf } f_c^{-1}(C)$$

Daher ist  $f_c$  lokal eine glatte bijektive Abbildung in der Nähe der Punkte von  $f_c^{-1}(C)$ . Tatsächlich kann  $z \in f_c^{-1}(C)$  kein Schnittpunkt von  $f_c^{-1}(C)$  mit sich selbst sein, sonst wäre  $f_c(z)$  ein Schnittpunkt von  $C$  mit sich selbst. Also ist  $f_c^{-1}(C)$  eine Schleife. Da  $f_c$  eine stetige Funktion ist, die die Schleife  $f_c^{-1}(C)$  und keine anderen Punkte auf die Schleife  $C$  abbildet, muss das Polynom  $f_c$  das Innere bzw. Äußere von  $f_c^{-1}(C)$  auf das Innere bzw. Äußere von  $C$  abbilden. Somit bildet  $f_c^{-1}$  das Innere von  $C$  auf das Innere von  $f_c^{-1}(C)$  ab.

- (b) Der Beweis ist ähnlich wie bei (a). Wenn  $C_0$  ein Stück einer glatten Kurve durch  $c$  ist, dann besteht  $f_c^{-1}(C_0)$  aus zwei glatten Stücken von Kurven durch  $0$ , welche sich im rechten Winkel schneiden und damit den Schnittpunkt der Achtschleife mit sich selbst liefern.
- (c) Der Beweis ist der gleiche wie bei (a). Wobei  $f_c^{-1}(z)$  nur einen der zwei Werte annehmen kann, während sich  $z$  über  $C$  bewegt, so dass zwei Schleifen entstehen.

□

**Satz 2.7 (Fundamentaler Satz der Mandelbrot-Menge)**

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : \{f_c^k(0)\}_{k \geq 1} \text{ ist beschränkt}\} \tag{2.1}$$

$$= \{c \in \mathbb{C} : f_c^k(0) \not\rightarrow \infty (k \rightarrow \infty)\} \tag{2.2}$$

Beweis: Nach Lemma 1.7 ist klar, dass

$$f_c^k(0) \not\rightarrow \infty \iff \{f_c^k(0)\} \text{ ist beschränkt}$$

Also sind (2.1) und (2.2) gleich.

- (a) Man zeigt als erstes:  $\{f_c^k(0)\}$  beschränkt  $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$  zusammenhängend.

Sei  $C$  ein großer Kreis in  $\mathbb{C}$ , so dass alle Punkte von  $\{f_c^k(0)\}$  innerhalb von  $C$  liegen, so dass  $f_c^{-1}(C)$  innerhalb von  $C$  ist und so dass die Punkte außerhalb von  $C$  gegen  $\infty$  konvergieren unter  $f_c^k$ . Da  $c = f_c(0)$  innerhalb von  $C$  ist, folgt mit Lemma 2.6(a), dass  $f_c^{-1}(C)$  eine Schleife im Inneren von  $C$  ist. Also ist auch  $f_c(c) = f_c^2(0)$  innerhalb von  $C$  und  $f_c^{-1}$  bildet das Äußere von  $C$  auf das Äußere von  $f_c^{-1}(C)$  ab, also ist  $c$  innerhalb von  $f_c^{-1}(C)$ .

Mit nochmaliger Anwendung von Lemma 2.6(a) folgt, dass  $f_c^{-2}(C)$  eine Schleife ist enthalten im Inneren von  $f_c^{-1}(C)$ . Wenn man das fortsetzt, sieht man, dass  $\{f_c^{-k}(C)\}$  aus einer Folge von Schleifen besteht, wobei jede die nächste in ihrem Inneren enthält.

Sei  $K$  die abgeschlossene Menge der Punkte, die auf oder innerhalb der Schleife  $f_c^{-k}(C)$  sind für alle  $k$ . Wenn für  $z \in \mathbb{C} \setminus K$  ein  $f_c^k(z)$  außerhalb von  $C$  liegt, folgt  $f_c^k(z) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ . Somit gilt:

$$A(\infty) = \{z : f_c^k(z) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty\} = \mathbb{C} \setminus K$$

Also ist  $K$  die ausgefüllte Julia-Menge von  $f_c$ . Nach Lemma 1.23 ist  $\mathcal{J}(f_c)$  der Rand von  $\mathbb{C} \setminus K$ , welcher natürlich auch der Rand von  $K$  ist. Aber  $K$  ist der Schnitt von einer kleiner werdenden Folge von abgeschlossenen, zusammenhängenden Mengen (d.h. zusammenhängende Mengen, deren Komplement zusammenhängend ist). Also nach einem einfachen topologischen Argument ist  $K$  zusammenhängend und hat also einen zusammenhängenden Rand. Damit ist  $\mathcal{J}(f_c)$  zusammenhängend.

(b) Bleibt zu zeigen:  $\{f_c^k(0)\}$  unbeschränkt  $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$  nicht zusammenhängend.

Sei  $C$  ein großer Kreis, so dass  $f_c^{-1}(C)$  innerhalb von  $C$  ist und so dass alle Punkte außerhalb von  $C$  gegen  $\infty$  konvergieren und so dass für ein  $p$  der Punkt  $f_c^{p-1}(c) = f_c^p(0) \in C$  mit  $f_c^k(0)$  innerhalb oder außerhalb von  $C$  jenachdem, ob  $k$  kleiner oder größer als  $p$  ist.

Sei  $\{f_c^{-k}(C)\}$  eine Folge von Schleifen, wobei jede die nächste in ihrem Inneren enthält. Das Argument schlägt fehl, wenn man die Schleife  $f_c^{1-p}(C)$  erreicht, da  $c \in f_c^{1-p}(C)$  und somit Lemma 2.6(a) nicht zutrifft. Mit Lemma 2.6(b) erhält man:  $E \equiv f^{-p}(C)$  ist eine Achtschleife innerhalb der Schleife  $f_c^{1-p}(C)$ , wobei  $f_c$  das Innere jeder Hälfte von  $E$  auf das Innere von  $f_c^{1-p}(C)$  abbildet. Die Julia-Menge  $\mathcal{J}(f_c)$  muss im Inneren der Schleifen von  $E$  liegen, weil alle anderen Punkte gegen  $\infty$  konvergieren.

Da  $\mathcal{J}(f_c)$  invariant unter  $f_c^{-1}$  ist, müssen Teile von  $\mathcal{J}(f_c)$  in jeder der Schleifen von  $E$  liegen. Somit trennt die Achtschleife von  $E$   $\mathcal{J}(f_c)$ . Mit Anwendung von Lemma 2.6(c) folgt, dass  $\mathcal{J}(f_c)$  völlig unzusammenhängend ist. □

In (2.1) und (2.2) werden die Iterierten des Ursprungs betrachtet. Der Grund dafür ist, dass der Ursprung der kritische Punkt von  $f_c$  für jedes  $c$  ist, also der Punkt für den  $f_c'(z) = 0$  gilt.

Die kritischen Punkte sind die Punkte, an denen  $f_c$  keine lokale Bijektion ist. Dies ist eine Eigenschaft, die kritisch war in der Unterscheidung der zwei Fälle im Beweis von Satz 2.7 und die entscheidend ist für die Analyse der Dynamik von polynomiellen oder meromorphen Funktionen.

**Bemerkung 2.8 (Zeichnen der Mandelbrot-Menge)** Die äquivalente Definition von  $\mathcal{M}$  gegeben durch (2.1) ist die Grundlage für Computer-generierte Bilder der Mandelbrot-Menge. Man wähle Zahlen  $r > 2$  und  $k_0$  in der Größenordnung von 100. Für jedes  $c$  berechne man die Folge  $\{f_c^k(0)\}$  bis entweder  $|f_c^k(0)| \geq r$  (In diesem Fall wird  $c$  als außerhalb von  $\mathcal{M}$  betrachtet.) oder  $k = k_0$  (In diesem Fall sei  $c \in \mathcal{M}$ ). Indem man dies für jeden Punkt der Region wiederholt, erhält man ein Bild von  $\mathcal{M}$ . Meist werden dem Komplement von  $\mathcal{M}$  Farben zugewiesen abhängig vom ersten  $k$  für das  $|f_c^k(0)| \geq r$  gilt.

**Bemerkung 2.9 (Form der Mandelbrot-Menge)** Bilder der Mandelbrot-Menge deuten an, dass diese eine sehr komplizierte Form hat. Sie hat einige offensichtliche Eigenschaften:

- Einen Hauptkardiod (herzförmige Kurve) an den eine Reihe von herausragenden kreisförmigen „Knospen“ angeschlossen sind.
- Jede dieser Knospen ist von weiteren Knospen umgeben usw.
- Zusätzlich wachsen feine, verzweigte „Haare“ aus den Knospen. Diese Haare enthalten entlang ihrer Länge Miniaturkopien der gesamten Mandelbrot-Menge.
- Die Mandelbrot-Menge ist zusammenhängend und ihr Rand hat Dimension 2 (Dies spiegelt ihre Komplexität wieder.).

## 3 Julia-Mengen von quadratischen Funktionen

### 3.1 Motivation

Im Folgenden wird untersucht, wie sich die Struktur der Julia-Menge  $\mathcal{J}(f_c)$  ändert, wenn man den Parameter  $c$  über die komplexe Zahlenebene wandern lässt. Im speziellen wird die Bedeutung der verschiedenen Teile der Mandelbrotmenge offensichtlich. Die anziehenden periodischen Punkte von  $f_c$  sind bedeutend für die Form von  $\mathcal{J}(f_c)$ . Es kann gezeigt werden, dass wenn  $w \neq \infty$  ein anziehender periodischer Punkt von einem Polynom  $f$  ist, es dann einen kritischen Punkt  $z$  ( $f'(z) = 0$ ) gibt, so dass  $f^k(z)$  vom periodischen

Orbit, das  $w$  enthält, angezogen wird. Da der einzige kritische Punkt von  $f_c$  0 ist, kann  $f_c$  maximal einen anziehenden periodischen Orbit haben.

Außerdem: Wenn  $c \notin \mathcal{M}$ , dann folgt mit Satz 2.7  $f_c^k(0) \rightarrow \infty$ , dass  $f_c$  keinen anziehenden periodischen Orbit haben kann. Es wird vermutet, dass die Menge von  $c$ 's für die  $f_c$  einen anziehenden periodischen Orbit hat, das Innere von  $\mathcal{M}$  füllt. Es liegt nahe  $f_c$  nach der Periode  $p$  des (endlichen) anziehenden Orbits zu kategorisieren, falls dieses existiert. Die Werte von  $c$ , die zu verschiedenen  $p$  gehören, können als verschiedene Regionen der Mandelbrot-Menge  $\mathcal{M}$  identifiziert werden.

Die nun folgenden Betrachtungen und Beweise setzen voraus, dass dem Leser die Sätze aus dem vorangegangenen Vortrag über „Selbstähnliche und selbstaffine Mengen“ bekannt sind.

### 3.2 Form der Julia-Menge abhängig von $c$

**Satz 3.1 (unzusammenhängende Julia-Mengen)** *Angenommen  $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6}) \approx 2,475$ . Dann ist  $\mathcal{J}(f_c)$  total unzusammenhängend und ist Attraktor (im Sinne wie im Vorgängervortrag verwendet) der Kontraktionen, die durch die zwei Zweige von  $f_c^{-1}(z) = \pm(z - c)^{\frac{1}{2}}$  für  $z$  nahe  $J$  gegeben sind. Wenn  $|c|$  groß ist, gilt:*

$$\dim_{\mathbb{B}} \mathcal{J}(f_c) = \dim_{\mathbb{H}} \mathcal{J}(f_c) \simeq \frac{2 \log 2}{\log 4|c|}$$

*Beweis:* Sei  $C$  der Kreis  $|z| = |c|$  und  $D$  dessen Inneres  $|z| < |c|$ . Dann gilt:

$$f_c^{-1}(C) = \{(ce^{i\theta} - c)^{\frac{1}{2}} : 0 \leq \theta \leq 4\pi\}$$

Dies ist eine Achtschleife mit Schnittpunkt mit sich selbst in 0. Wegen  $|c| > 2$ , gilt  $f_c^{-1}(C) \subset D$  aufgrund von:

$$|z| > |c| \Rightarrow |f_c(z)| \geq |z^2| - |c| \geq |c|^2 - |c| > |c|$$

Das Innere jeder der Schleifen von  $f_c^{-1}(C)$  wird durch  $f_c$  bijektiv auf  $D$  abgebildet. Seien  $S_1, S_2 : D \rightarrow D$  die Zweige von  $f_c^{-1}(z)$  innerhalb der Schleifen. Dann sind  $S_1(D)$  und  $S_2(D)$  das jeweilige Innere von der beiden Schleifen. Sei  $V$  die Scheibe  $\{z : |z| < |2c|^{\frac{1}{2}}\}$ . Der Radius von  $V$  ist so gewählt, dass  $V$  gerade  $f_c^{-1}(C)$  enthält. Damit sind  $S_1(D), S_2(D) \subset V \subset D$ . Somit gilt:  $S_1(V), S_2(V) \subset V$  mit  $S_1(\bar{V})$  und  $S_2(\bar{V})$  disjunkt. Für  $i = 1, 2$  gilt:

$$|S_i(z_1) - S_i(z_2)| = \left| (z_1 - c)^{\frac{1}{2}} - (z_2 - c)^{\frac{1}{2}} \right| = \frac{|z_1 - z_2|}{\left| (z_1 - c)^{\frac{1}{2}} + (z_2 - c)^{\frac{1}{2}} \right|}$$

Wenn  $z_1, z_2 \in \bar{V}$  den kleinsten und größten Wert annehmen, gilt daher:

$$\frac{1}{2} \left( |c| + |2c|^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{|S_i(z_1) - S_i(z_2)|}{|z_1 - z_2|} \leq \frac{1}{2} \left( |c| - |2c|^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.1)$$

Die obere Schranke ist kleiner 1, wenn  $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$ . In diesem Fall sind  $S_1$  und  $S_2$  Kontraktionen auf der Scheibe  $\bar{V}$ . Nach Theorem 9.1 aus dem Vorgängervortrag gibt es einen eindeutigen, nicht-leeren, kompakten Attraktor  $F \subset \bar{V}$ , der Folgendes erfüllt:

$$S_1(F) \cup S_2(F) = F \quad (3.2)$$

Da  $S_1(\bar{V})$  und  $S_2(\bar{V})$  disjunkt sind, sind auch  $S_1(F)$  und  $S_2(F)$  disjunkt. Daraus folgt, dass  $F$  total unzusammenhängend ist.

In der Tat ist  $F = \mathcal{J} = \mathcal{J}(f_c)$ . Eine Möglichkeit das zu sehen ist festzustellen, dass  $\bar{V}$  mindestens einen Punkt  $z \in \mathcal{J}$  enthält (z.B. ein abstoßender Fixpunkt von  $f_c$ ). Dann ist  $\mathcal{J} = \bigcup_{k=1}^{\infty} f_c^{-k}(z) \subset \bar{V}$ , da  $f_c^{-k}(\bar{V}) \subset \bar{V}$ .

Mit den Resultaten aus der Zusammenfassung 1.25 folgt, dass  $\mathcal{J}$  eine nicht-leere, kompakte Teilmenge von  $\bar{V}$  ist, die  $J = f_c^{-1}(J)$  erfüllt, was äquivalent zu  $J = S_1(J) \cup S_2(J)$ . Also ist  $\mathcal{J} = F$  die eindeutige, nicht-leere, kompakte Menge, die (3.2) erfüllt.

Es bleibt noch übrig, die Dimension von  $\mathcal{J}(f_c) = F$  zu schätzen. Nach den Propositionen 9.6 und 9.7 aus dem Vorgängervortrag und (3.1), sind die untere und obere Schranke für  $\dim_{\mathbb{H}} \mathcal{J}(f_c)$  gegeben durch die Lösungen für  $2 \left( \frac{1}{2} \left( |c| \pm |2c|^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right)^s = 1$ , d.h.  $s = \frac{2 \log 2}{\log 4 \left( |c| \pm |2c|^{\frac{1}{2}} \right)}$ , welches die behauptete asymptotische Schätzung liefert.

□

**Satz 3.2 (einfache, geschlossene Kurve)** Wenn  $|c| < \frac{1}{4}$ , dann ist  $\mathcal{J}(f_c)$  eine einfache, geschlossene Kurve. (Eine Kurve ist einfach, wenn sie keine Schnittpunkte mit sich selbst hat.) (ohne Beweis)

**Bemerkung 3.3 (Dimensionsschätzung)** Es kann gezeigt werden, dass für kleine  $|c|$ , die Dimension durch folgenden Ausdruck abgeschätzt werden kann:

$$s = \dim_{\mathbb{B}} \mathcal{J}(f_c) = \dim_{\mathbb{H}} \mathcal{J}(f_c) = 1 + \frac{|c|^2}{4 \log 2} + \text{Terme mit } |c|^3 \text{ und höheren Exponenten} \quad (3.3)$$

## 4 Computergenerierte Bilder

Im Folgenden wird beschrieben, wie man Bilder von Julia-Mengen oder der Mandelbrot-Menge mit Hilfe eines Computers zeichnen kann.

### 4.1 Prinzipielles Verfahren

Ein mit dem Computer generiertes Bild ist aus Pixeln aufgebaut. Zum Berechnen eines Bildes wird ein Ausschnitt der komplexen Zahlenebene über die Pixel gelegt, das heißt jedes Pixel bekommt eine komplexe Zahl zugewiesen. Diese Zahl wird als Parameter verwendet, um den Pixel entsprechend einzufärben. Wie genau diese Zahl verwendet wird, hängt von der Art des Bildes ab (Julia- oder Mandelbrot-Menge).

### 4.2 Julia-Menge

Für die Berechnung eines Ausschnitts einer Julia-Menge muss der Parameter  $c$  von  $f_c$  und eine maximale Anzahl an Iterationen  $\hat{k}$  gegeben sein.

Für jeden der Pixel wird jeweils die entsprechende komplexe Zahl  $z$  berechnet und als Startpunkt für die Iterationen von  $f_c$  verwendet. Die Berechnung der Iterierten  $f_c^k(z)$  wird abgebrochen, wenn entweder per Divergenzlemma (Lemma 1.7) entschieden wurde, dass die Folge für  $z$  divergent ist, oder  $k = \hat{k}$ .

Im ersten Fall gilt  $z \in \bar{\mathcal{K}}(f_c)$  und das Pixel wird entsprechend der Anzahl der berechneten Iterationen eingefärbt.

Im zweiten Fall gilt  $z \in \mathcal{K}(f_c)$  und das Pixel wird schwarz gefärbt. Die Färbung kann natürlich auch anders gewählt werden.

Der Test des Divergenzlemma wird konkret wie folgt angewendet:

$$f_c^k(z) \geq \max\{|z|, 2\} \Rightarrow z \in \bar{\mathcal{K}}(f_c)$$

Für die Darstellung der Julia-Menge kann man auch direkt die Randpunkte berechnen (natürlich nur als numerische Näherung). Dazu berechnet man einen abstoßenden Fixpunkt aus  $z = f_c(z)$ .

$$\Rightarrow z^2 - z + c = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2}$$

Da der abstoßende Fixpunkt Bestandteil der Julia-Menge ist, kann man das Generierungslemma (Lemma 1.17) anwenden, um weitere Punkte der Julia-Menge zu berechnen per:  $f_c^{-1}(z) = \sqrt{z - c}$ . Sei  $z_1$  der abstoßende Fixpunkt, dann ergeben sich weitere Punkte der Julia-Menge durch:

$$z_{2n} := f_c^{-1}(z_n) \text{ und } z_{2n+1} := -f_c^{-1}(z_n)$$

Die komplexe Quadratwurzel ergibt sich als Lösung der Gleichung  $z^2 = w$  mit  $z := x+iy$  und  $w := u+iv$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 - y^2 + i2xy &= u + iv \Rightarrow u = x^2 - y^2 \text{ und } v = 2xy \\ \Rightarrow x &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{u + \sqrt{u^2 + v^2}} \text{ und } y = \frac{v}{2x} \end{aligned}$$

Als Darstellung bietet sich an, die Randpunkte in Schwarz auf eine weiße Zeichenfläche zu zeichnen.

### 4.3 Mandelbrot-Menge

Für die Berechnung eines Ausschnitts der Mandelbrot-Menge muss eine maximal Anzahl an Iterationen  $\hat{k}$  gegeben sein.

Für jeden der Pixel wird jeweils die entsprechende komplexe Zahl  $c$  berechnet, welche als Parameter für  $f_c$  dient. Nach dem Fundamental Satz der Mandelbrot-Menge (Satz 2.7) genügt es, die Iterierten  $f_c^k(0)$  zu betrachten, um zu entscheiden, ob ein Punkt zur Mandelbrot-Menge gehört.

Die Berechnung der Iterierten  $f_c^k(0)$  wird abgebrochen, wenn entweder per Divergenzlemma (Lemma 1.7) entschieden wurde, dass die Folge für 0 divergent ist, oder  $k = \hat{k}$ .

Im ersten Fall gilt  $c \in \overline{\mathcal{M}}$  und das Pixel wird entsprechend der Anzahl der berechneten Iterationen eingefärbt oder weiß gelassen.

Im zweiten Fall gilt  $c \in \mathcal{M}$  und das Pixel wird schwarz gefärbt. Die Färbung kann natürlich auch anders gewählt werden.

## 5 Einige Bilder

### 5.1 Mandelbrot-Menge

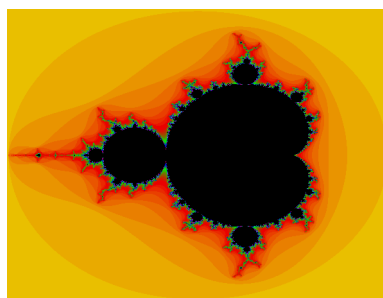


Abbildung 1: Mandelbrot-Menge global

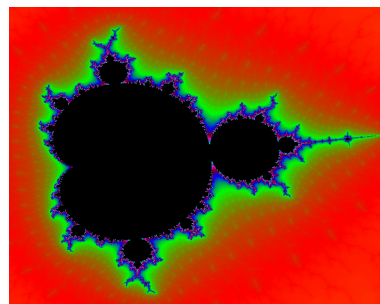
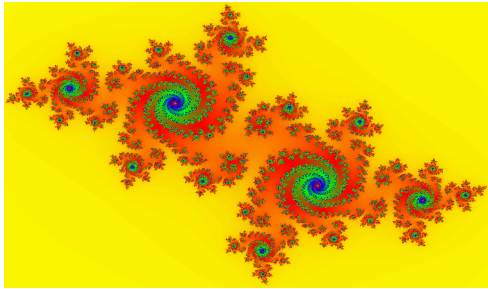
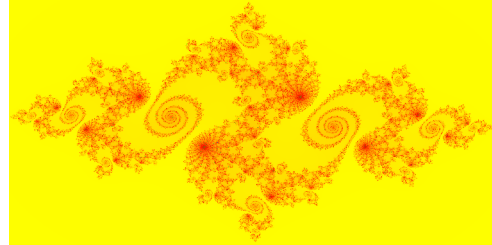


Abbildung 2: Mandelbrot-Menge stark vergrößert

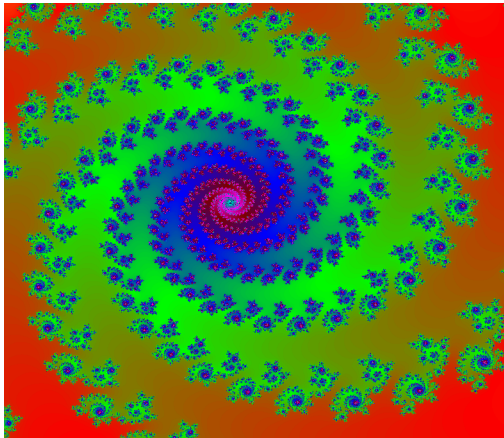
## 5.2 Julia-Menge



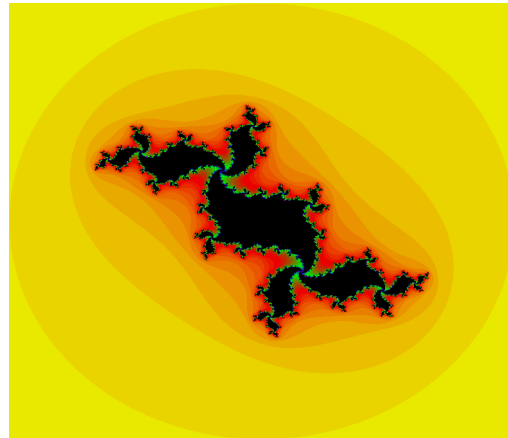
$c = -0,521707190197 + 0,5189173146169i$   
 $x \in [-1,4968233799 \dots 1,4866581957]$   
 $y \in [-1,9175257732 \dots 1,0633284242]$



$c = -0,7581589924014 + 0,0711532003235i$   
 $x \in [-1,583227446 \dots 1,5476493011]$   
 $y \in [-2,0117820324 \dots 1,11634757]$



$c = -0,521707190197 + 0,5189173146169i$   
 $x \in [-0,5566665429 \dots -0,2571810988]$   
 $y \in [0,1194644294 \dots 0,4179888557]$



$c = -0,1996720123567 + 0,7533418508419i$   
 $x \in [-2 \dots 2]$   
 $y \in [-2 \dots 2]$

## Literatur

- [Fal03] K.Falconer: Fractal Geometry - Mathematical foundations and applications, 2nd Edition, Wiley, 2003
- [PJS04] H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe: Chaos and fractals. New frontiers of science, 2nd Edition, Springer, 2004