Hauptseminar Fraktale: Andere Begriffe der Dimension

Marion Bendig

21. November 2006

Überblick

1 Einleitung
2 Fraktale Dimension
- Begriffsklärung
- Gewünschte Eigenschaften
- Beispiel: Teilerdimension

3 Boxdimension
- Definition
- Eigenschaften
- Modifikation

4 Packmaß und Packdimension
5 Weitere Definitionen
6 Abschließende Bemerkung
7 Literatur

Einleitung

Thema:
Alternativen und Modifikationen zur Hausdorffschen Dimension

- als Ergänzung
- für Spezialfälle
- leichter berechenbar

Fraktale Dimension

- Verallgemeinerung des gängigen Dimensionsbegriffes
- Hausdorffsches Maß verallgemeinert Länge, Fläche, Volumen
- Skalierung mit λ:

$$Maß_{skaliert} = Maß_{alt} \cdot \lambda^{dim}$$

$\rightarrow$ bei Fraktalen nicht ganzzahlig lösbar

Gewünschte Eigenschaften einer Dimension

- wie bei Haussdorffscher Dimension: Seien $F, E \subset \mathbb{R}^n$
  - *Monotonie:* $E \subset F \Rightarrow dim(E) \leq dim(F)$
  - *Stabilität:* $dim(E \cup F) = max\left(dim(E), dim(F)\right)$
  - *Stabilität gegenüber abzählbarer Vereinigung:* $dim(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sup_{1 \leq i \leq \infty} dim(F_i)$
  - *Geometrische Invarianz:* $dim(f(F)) = dim(F)$, wenn f affine Transformation im $\mathbb{R}^n$
  - *Lipschitz-Invarianz:* $dim(f(F)) = dim(F)$, wenn f Bi-Lipschitz-Transformation

Gewünschte Eigenschaften einer Dimension(2)

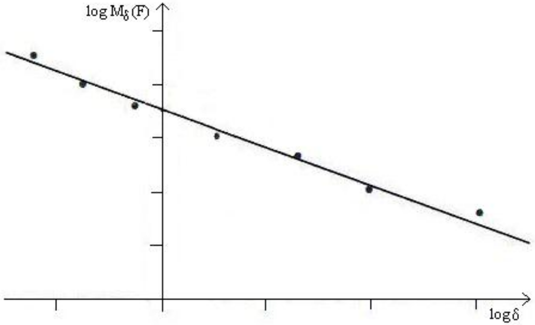
- *Abzählbare Mengen:*
  $dim(F) = 0$, wenn F abzählbar oder endlich
- *Offene Mengen:*
  F ist offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n \Rightarrow dim(F) = n$
- *Glatte Mannigfaltigkeiten:*
  F glatte, m-dimensionale Mannigfaltigkeit $\Rightarrow dim(F) = m$

Beispiel: Teilerdimension

- Menge $F \subset \mathbb{R}^n$ wird mit Maßstab der Feinheit δ gemessen
- Seien
  - F eine Kurve
  - $M_\delta(F)$ die Anzahl Schritte der Länge δ, mit denen F abgeschritten werden kann
  - s die Teilerdimension
  - c die s-dimensionale Länge von F
- $c \sim M_\delta(F) \cdot \delta^s \quad \Rightarrow \quad s = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log M_\delta(F)}{-\log \delta}$

Beispiel: Teilerdimension(2)

- s $\approx$ minus Steigung des $\log \delta$ - $\log M_\delta(F)$ - Graphen



Boxdimension: Definition

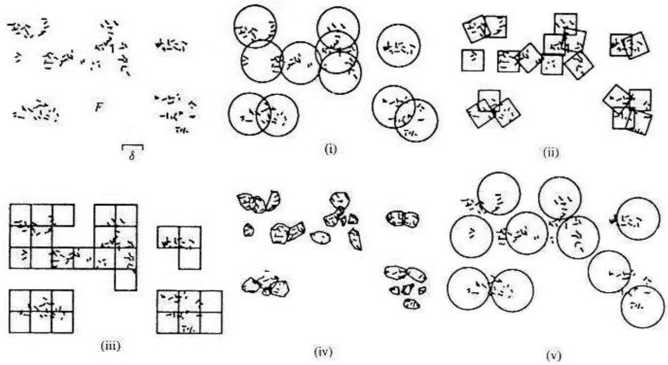
Sei F eine nicht-leere, beschränkte Untermenge des $\mathbb{R}^n$.

- obere Boxdimension: $\overline{dim}_B(F) = \overline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}$
- untere Boxdimension: $\underline{dim}_B(F) = \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}$
- wenn $\overline{dim}_B = \underline{dim}_B$: $dim_B(F) = \lim_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}$
- $N_\delta(F)$ kann unterschiedlich definiert werden

Definitionen für $N_\delta(F)$:

- kleinste Anzahl von geschlossenen Kugeln mit Radius δ, die F überdecken (i)
- kleinste Anzahl von Würfeln mit Seitenlänge δ, die F überdecken (ii)
- Anzahl von Würfeln eines δ-Gitters, die sich mit F überschneiden (iii)
- kleinste Anzahl von Mengen mit einem Durchmesser von höchstens δ, die F überdecken (iv)
- größte Anzahl von disjunkten Kugeln mit Radius δ und Mittelpunkt in F (v)

Definitionen für $N_\delta(F)$ anschaulich:



Äquivalenz der Definitionen

- Beweis jeweils durch Zeigen der Äquivalenz mit Definition (iv)
- Beispiel: (iv) $\Leftrightarrow$ (iii)
  - Würfel sind Mengen mit Durchmesser $\delta\sqrt{n}$
    $\Rightarrow N_{\delta\sqrt{n}}(F) \leq N'_\delta(F)$
  - Für $\delta\sqrt{n} < 1$: $\frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log \delta\sqrt{n}} \leq \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta\sqrt{n}} = \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \sqrt{n} - \log \delta}$
  - Grenzwert:
    $\underline{dim}_B(F) \leq \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta}$ und $\overline{dim}_B(F) \leq \overline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta}$

Äquivalenz der Definitionen(2)

- Menge mit Durchmesser $\leq \delta$ ist in 3^n δ-Gitterwürfeln enthalten $\Rightarrow N'_\delta(F) \leq 3^n \cdot N_\delta(F)$
- $N'_\delta(F) \leq 3^n \cdot N_\delta(F)$

  $\Rightarrow \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \underline{dim}_B(F)$

  und $\overline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \overline{dim}_B(F)$
- $\Rightarrow \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta} = \underline{dim}_B(F)$

  und $\overline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta} = \overline{dim}_B(F)$

- andere Äquivalenzen ähnlich (siehe Ausarbeitung)

Vergleich mit der Hausdorffschen Dimension

- $dim_H(F) \leq \underline{dim}_B(F) \leq \overline{dim}_B(F) \qquad \forall F \subset \mathbb{R}^n$
- Boxdimension: Betrachte s - $N_\delta(F)\delta^s$ - Graph: Sprung von ∞ nach 0 bei $s = dim_B(F)$
- Vergleiche:
  - $\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf\left\{ \sum_i |U_i|^s : \{U_i\}\ \delta - \ddot{U}berdeckung\ von\ F \right\}$ Überdeckungsmengen unterschiedlicher Größe
  - $N_\delta(F)\delta^s = \inf\left\{ \sum_i \delta^s : \{U_i\}\ \delta - \ddot{U}berdeckung\ von\ F \right\}$ Überdeckungsmengen gleicher Grösse
- Boxdimension leichter zu berechnen

Eigenschaften der Boxdimension

- Eine glatte, m-dimensionale Mannigfaltigkeit $F \subset \mathbb{R}^n$ hat Boxdimension $dim_B(F) = m$.
- $\overline{dim}_B$ und $\underline{dim}_B$ sind monoton: $E \subset F \Rightarrow dim(E) \leq dim(F)$
- $\overline{dim}_B$ ist stabil gegenüber abzählbarer Vereiniung ($dim(E \cup F) = max\left(dim(E), dim(F)\right)$), $\underline{dim}_B$ nicht
- $\overline{dim}_B$ und $\underline{dim}_B$ sind Bi-Lipschitz-invariant.
- $\overline{dim}_B(\overline{F}) = \overline{dim}_B(F)$ und $\underline{dim}_B(\overline{F}) = \underline{dim}_B(F)$ ($\overline{F}$ Abschluss von F)

Probleme der Boxdimension

- abzählbare Mengen können Boxdimension $\neq 0$ haben
- $dim(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \neq \sup_i \{dim_B(F_i)\}$ möglich

Modifizierte Boxdimension

Sei F eine nicht-leere, beschränkte Untermenge des $\mathbb{R}^n$ und seien $\{F_i\}$ abzählbare Überdeckungen von F.

- $\overline{dim}_{MB}(F) = \inf_{\{F_i\}} \left\{ \sup_i \{\overline{dim}_B(F_i) : F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\} \right\}$ und $\underline{dim}_{MB}(F) = \inf_{\{F_i\}} \left\{ \sup_i \{\underline{dim}_B(F_i) : F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\} \right\}$
- also: Zerlegung von F in abzählbare Anzahl von Teilmengen, so dass die größte Teilmenge eine möglichst kleine Dimension hat
- hat dieselben Eigenschaften wie Hausdorffsche Dimension
- $0 \leq dim_H(F) \leq \underline{dim}_{MB}(F) \leq \overline{dim}_{MB}(F) \leq \overline{dim}_B(F) \leq n$

Packmaß und Packdimension

Seien $s, \delta \geq 0$ und $\{B_i\}$ Mengen disjunkter Kugeln mit Radien $\leq \delta$ und Mittelpunkten in F.

- $\mathcal{P}^s_\delta(F) = \sup \left\{ \sum_i |B_i|^s \right\}$
- s-dimensionales Packmaß:
  $\mathcal{P}^s(F) = \inf \left\{ \sum_i \mathcal{P}^s_0(F_i) : F \subset \bigcup_{i=1}^\infty F_i \right\}$
- Packdimension:
  $dim_P(F) = \sup \{s : \mathcal{P}^s(F) = \infty\} = \inf \{s : \mathcal{P}^s(F) = 0\}$
- $dim_H(F) \leq \underline{dim}_{MB}(F) \leq \overline{dim}_{MB}(F) = dim_P(F) \leq \overline{dim}_B(F)$
- Berechnung schwierig

Variante zur Hausdorffschen Dimension

- Kurve: Bild von $[a, b]$ unter stetiger Bijektion $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$
- Idee: Abschnitte der Kurve selbst als Hüllmenge benutzen
- Betrachte inf $\left\{ \sum_{i=1}^{m} |f([t_{i-1,t_i}])|^s \right\}$ über alle möglichen Aufteilungen $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ mit $|f([t_{i-1}, t_i])| \leq \delta$ für $\delta \to 0$
- Dimension: Wert von s, für den der Grenzwert von ∞ nach 0 springt

Einseitige Dimension

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge, F deren Rand und F_δ die δ-Nachbarschaft von F.

- $dim_{OS}(F) = n - \lim_{\delta \to 0} \frac{\log vol^n(F_\delta \cap A)}{\log \delta}$

Kritischer Exponent

Sei F eine Menge, die durch Entfernen der Intervalle $I_1, I_2 ...$ aus einem Intervall I entsteht.

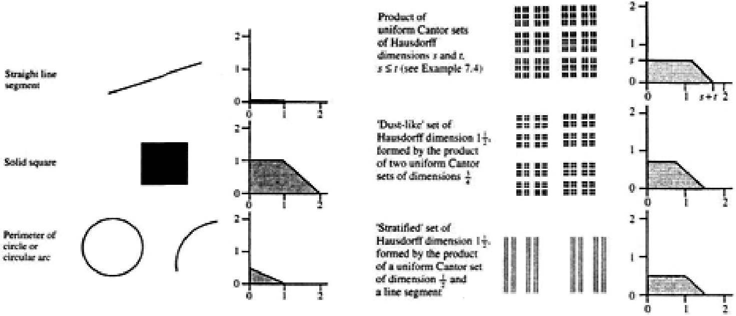
- Betrachte $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j|^s$
- konvergiert für $s < dim_{CE}(F)$, divergiert für $s > dim_{CE}(F)$

Dimensionsabdrücke

Sei U ein Rechteck, seien $a(U) \geq b(U)$ die Seitenlängen von U, $s, t \geq 0$, $F \subset \mathbb{R}^2$ und $\{U_i\}$ Rechtecks-δ-Überdeckung von F.

- $\mathcal{H}_\delta^{s,t}(F) = \inf \left\{ \sum_i a(U_i)^s b(U_i)^t \right\}$
- $\mathcal{H}^{s,t}(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^{s,t}(F)$
- $print(F) = \left\{(s,t) : \mathcal{H}^{s,t}(F) > 0, s, t \geq 0\right\}$
- charakterisiert eine Menge besser als andere Dimensionen
- Berechnung schwierig

Beispiele für Dimensionsabdrücke



Abschließende Bemerkung

- Boxdimension: leichte Berechenbarkeit, aber mathematische Probleme
- andere Definitionen meist für Spezialfälle
- Rechenaufwand $\leftrightarrow$ gewünschte Eigenschaften

Literatur

K.Falconer: Fractal Geometry - Mathematical foundations and applications, 2nd Edition, Wiley, 2003