

Fraktale: Eine Einführung



Fraktale Geometrie und ihre Anwendungen

Seminar im WS 06/07

Florian Daikeler

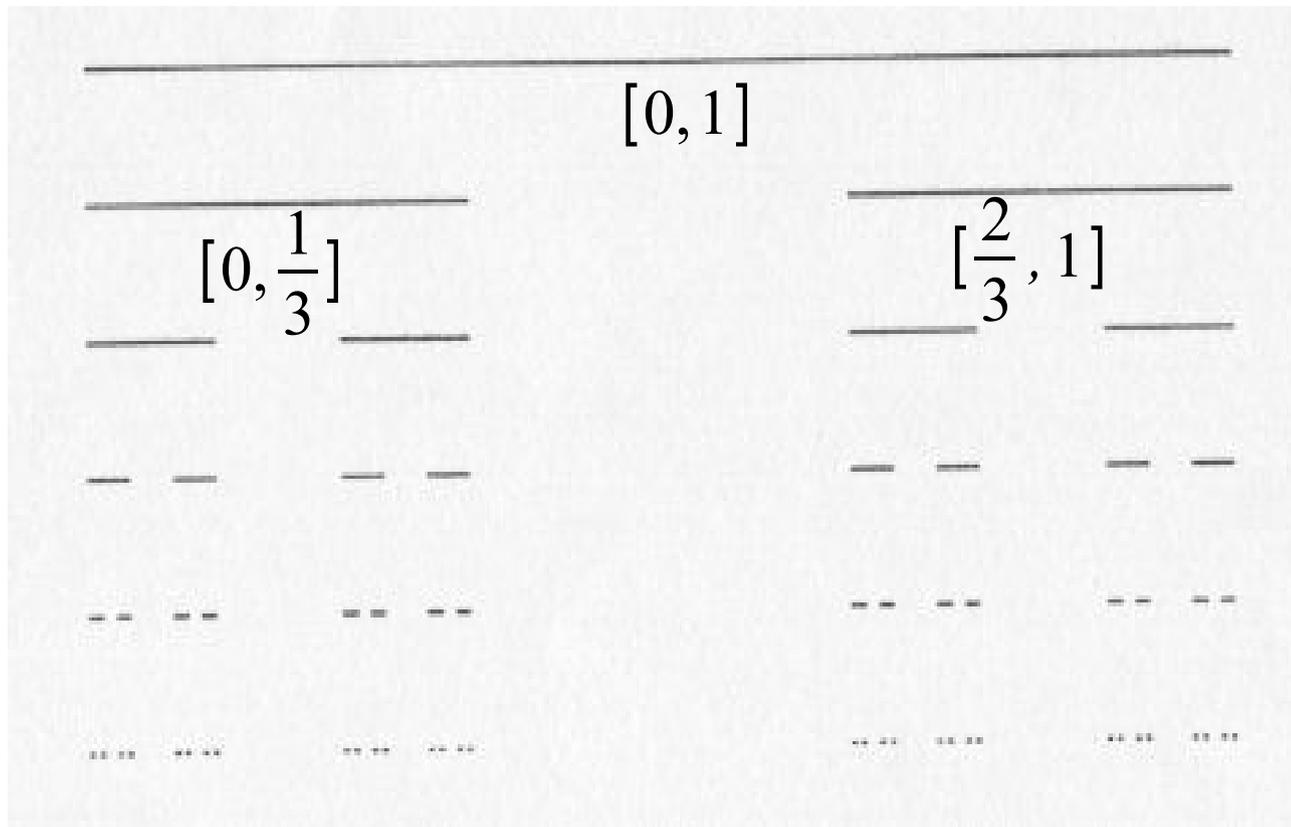
Übersicht:

- I. Einführung: Die Cantor-Drittelmenge
- II. Fraktale in 2D: Selbstähnlichkeit
- III. Beispiele: Fraktale höherer Dimension
- IV. Selbstähnlichkeit im weiteren Sinn
- V. Selbstaffinität

Kapitel I - Einführung:

Die Cantor-Drittelmenge

Die Cantor-Drittelmenge



- Nach n Schritten haben wir 2^n Intervalle der Länge $\frac{1}{3^n}$
- Man spricht deshalb auch vom **Cantor-Drittelstaub** / **Cantor-Diskontinuum**.

Die Ternärschreibweise - Darstellung einer Zahl zur Basis 3

Wir betrachten nur die Darstellung der Zahlen im Intervall $[0, 1]$
Damit lassen sich die Ternärzahlen in **drei Klassen** einteilen:

Klasse I

Abbrechend oder periodisch mit Periode 2

$$(0,0\bar{2})_3 = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \dots = \frac{1}{3} = (0,1)_3$$

- Jede Zahl dieser Klasse hat jene zwei äquivalente Darstellungen -

Klasse II

Periodisch mit Periode von 2 verschieden

$$(0, \overline{12})_3$$

Jede solche Zahl gestattet nur eine Darstellung

Klasse III

Weder abbrechend noch periodisch

$$(0, 12112211122211112222\dots)_3$$

Jede solche Zahl gestattet nur eine Darstellung

Eigenschaften der Cantor-Drittelmenge

- Die Menge aller Ternärzahlen in $[0, 1]$ welche die Ziffer 1 nicht enthalten lässt sich dem Cantor-Drittelstaub **bijektiv** zuordnen.
- Die Cantor-Drittelmenge ist **überabzählbar**
- Die Wahrscheinlichkeit beim Werfen eines Pfeiles auf das Intervall $[0, 1]$ einen Punkt der Cantor-Drittelmenge zu treffen ist 0

$$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{Zahl der günstigen Fälle}}{\text{Zahl der möglichen Fälle}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

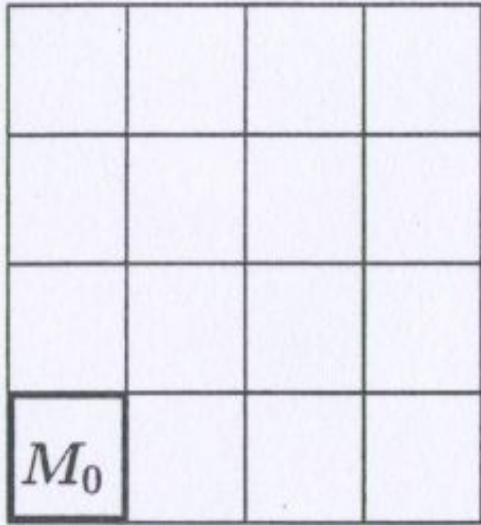
Kapitel II - Fraktale in 2D

Selbstähnlichkeit

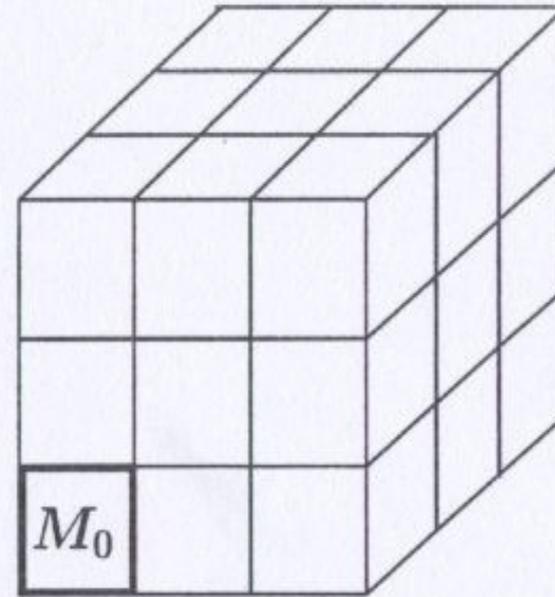
Definition (Selbstähnlichkeit im strengen Sinn)

Gegeben sei eine kompakte Punktmenge G in einem metrischen Raum. Sie werde in $N > 1$, bis auf Randelemente paarweise disjunkte, kongruente Teilmengen $G_i, i \in \{1, 2, \dots, N\}$ zerlegt, also $G = \bigcup_{i=1}^N G_i$. Wenn es dann für alle i eine Ähnlichkeitsabbildung γ mit $\gamma(G_i) = G$ gibt, dann heisst G **selbstähnlich im strengen Sinn**. Der zugeordnete Vergrößerungsfaktor wird mit p bezeichnet, $p > 1$.

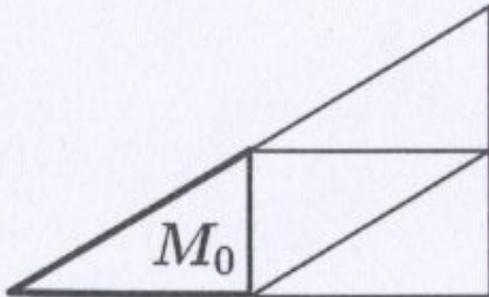
Einfache Beispiele für selbstähnliche Mengen im strengen Sinn



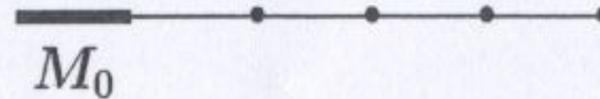
(a) $N = 16$
 $p = 4$



(b) $N = 27$
 $p = 3$



(c) $N = 4$
 $p = 2$



(d) $N = 5$
 $p = 5$

Die Selbstähnlichkeitsdimension d_s

Beobachtung: Es gilt $p^d = N$

Dabei ist d die anschauliche, uns vertraute Dimension.

Definition

Punktmenge G die im strengen Sinne selbstähnlich sind, mit N **Zerlegungsmengen** und dem **Vergrößerungsfaktor** p besitzen die Dimension

$$d_s(G) = \frac{\log(N)}{\log(p)}$$

Man spricht von der **Selbstähnlichkeitsdimension** (Index S)

Der Begriff des Fraktals

Wegen $N=2$ und $p=3$ hat die Cantor-Drittelmenge, selbst bei einer Verfeinerung mit $p=3^n$ und $N=2^n$ die Selbstähnlichkeitsdimension

$$d_s = \frac{\log(2^n)}{\log(3^n)} = \frac{n \cdot \log(2)}{n \cdot \log(3)} = \frac{\log(2)}{\log(3)} \approx 0,6309$$

Diese 'krumme' Dimension ist eine Überraschung aber zu erwarten, denn diese **Monstermenge** ist weder ein Punkt mit $d=0$ noch eine Strecke mit $d=1$. Irgendwie liegt sie dazwischen.

Als Dimension ergibt sich also in vielen Fällen eine nicht-ganze Zahl, weshalb man von **fraktaler Geometrie** spricht und die betrachteten Punktmenge auch Fraktale nennt.

Ein weiteres Beispiel aus der Dimension 1



$$N=3 \quad p=5$$

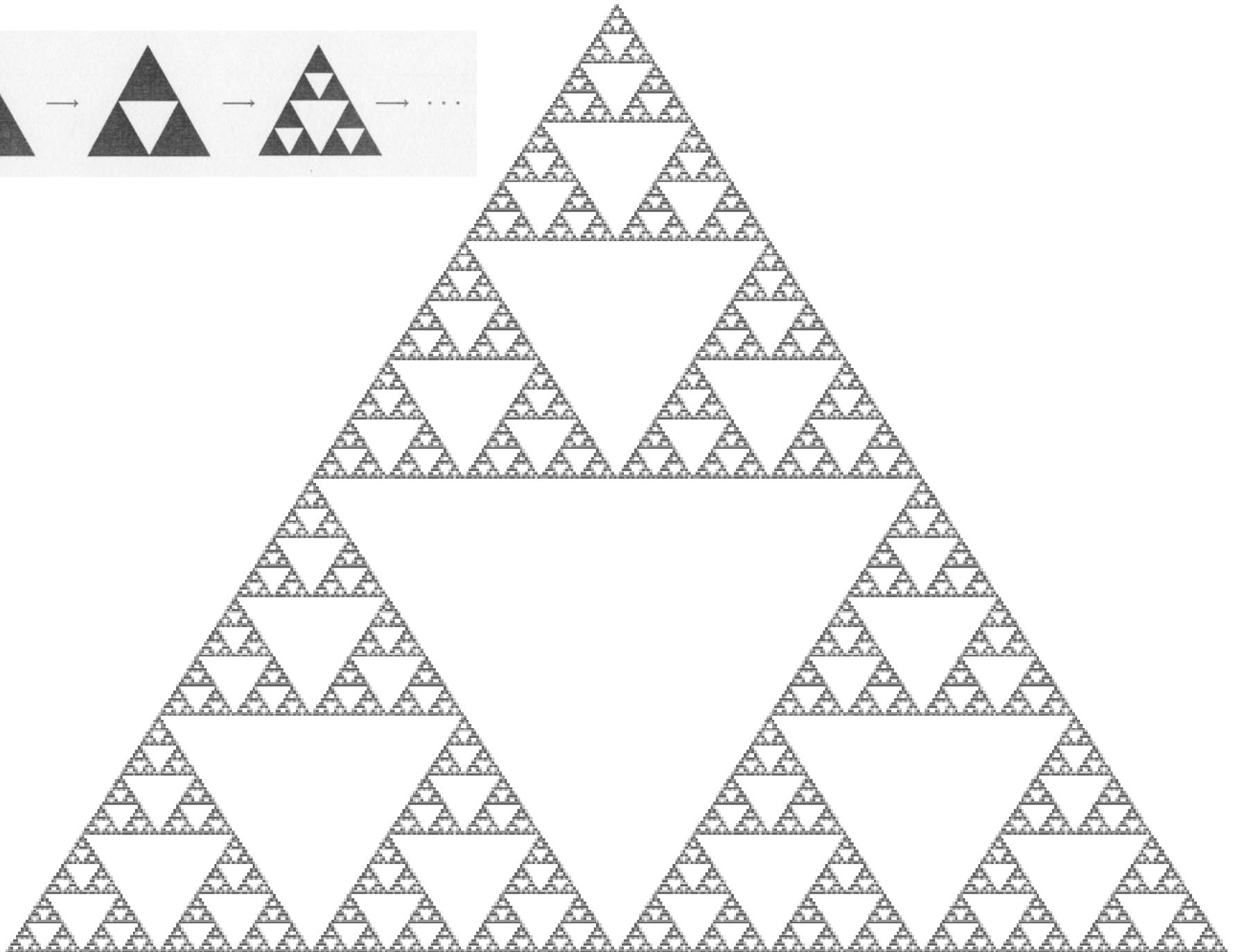
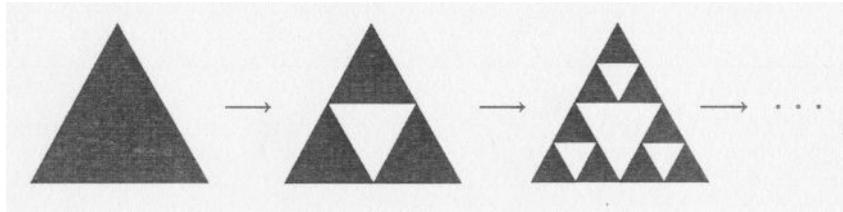
$$d_s = \frac{\log(3)}{\log(5)} \approx 0,6828$$

Im Vergleich zur Drittel-Menge wird nun mehr entfernt: $\frac{2}{5} > \frac{1}{3}$
Die Dimension wird aber **größer**.

Die Staubdimension ist kein Maß für das 'Gesamtgewicht' des Staubes sondern ein Maß für seine **gleichmäßige Verteilung**.

$$d_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{\log(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2(n+1)} = 1$$

Das Sierpinski Dreieck (Waclaw Sierpinski 1889 - 1969)



Eigenschaften des Sierpinski-Dreiecks

$$N=3, p=2 \Rightarrow d_s = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1,5850$$

Strecken		Dreiecke	
Länge	Anzahl	Inhalt	Anzahl
a	3	F_0	1
$\frac{1}{2}a$	3^2	$\frac{1}{4}F_0$	3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\frac{1}{2^n}a$	3^{n+1}	$\frac{1}{4^n}F_0$	3^n

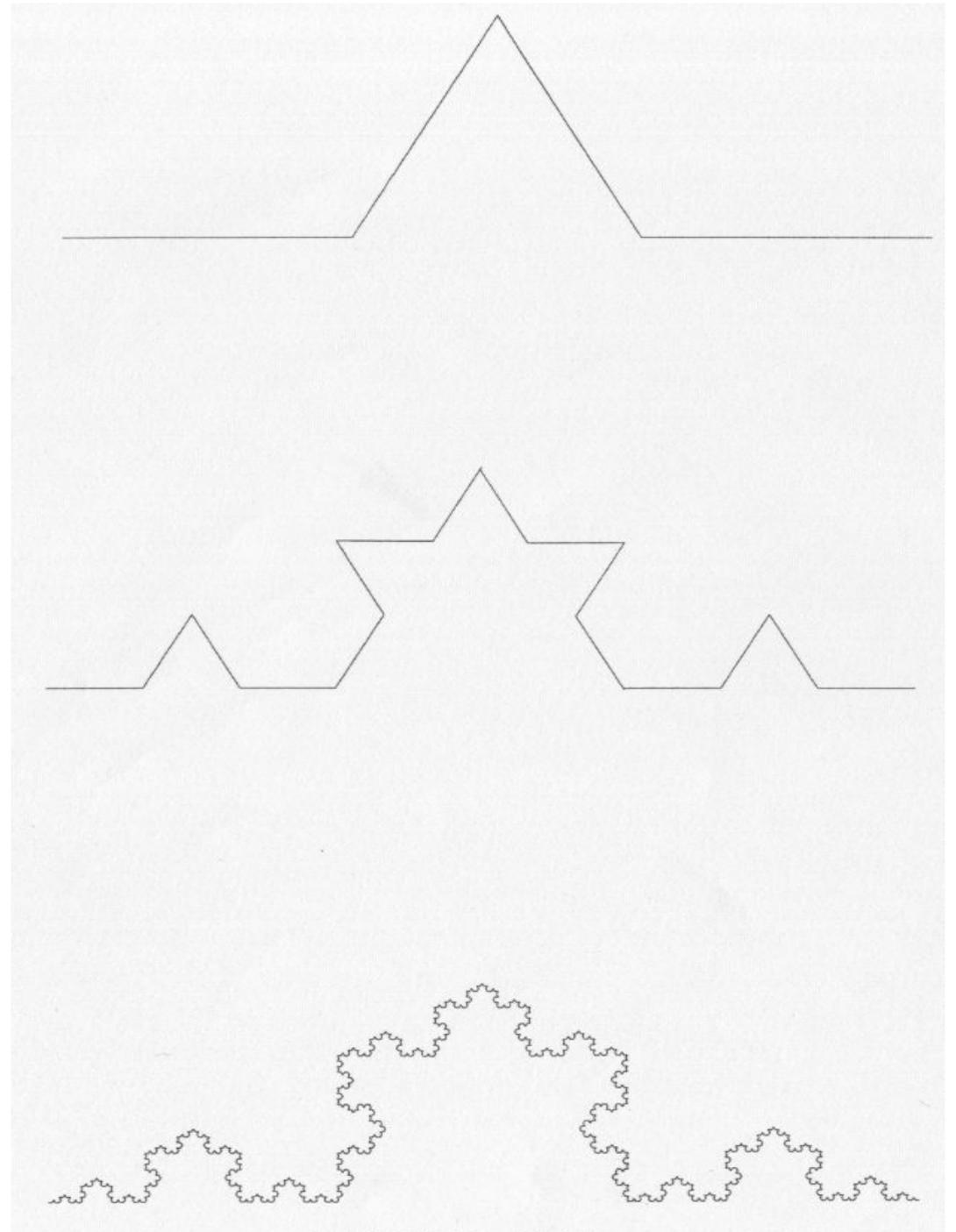
$$\text{mit } F_0 = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}.$$

Gesamtumfang der Limesmenge: $L_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} 3a\left(\frac{3}{2}\right)^n \rightarrow \infty.$

Gesamtinhalt der Limesmenge: $F_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} F_0\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0.$

Die Koch-Kurve

(Helge von Koch 1870 - 1924)



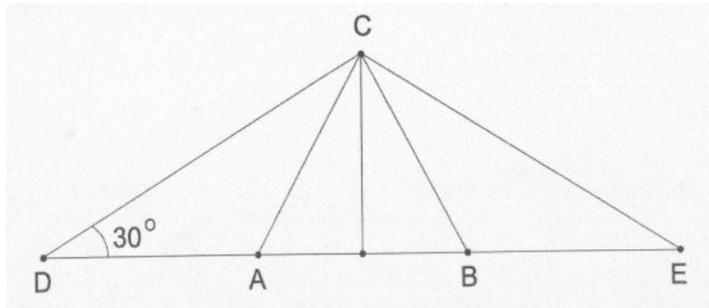
Eigenschaften der Koch-Kurve

- Die Koch-Kurve ist überall **stetig** und **nirgends differentierbar**.
- Die Koch-Kurve ist selbstähnlich im strengen Sinn mit $N=4$, $p=3$
- Die Dimension der Koch-Kurve: $d_s = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 2 \frac{\log(2)}{\log(3)} \approx 1,2618$
- Die Länge der Koch-Kurve ist ∞

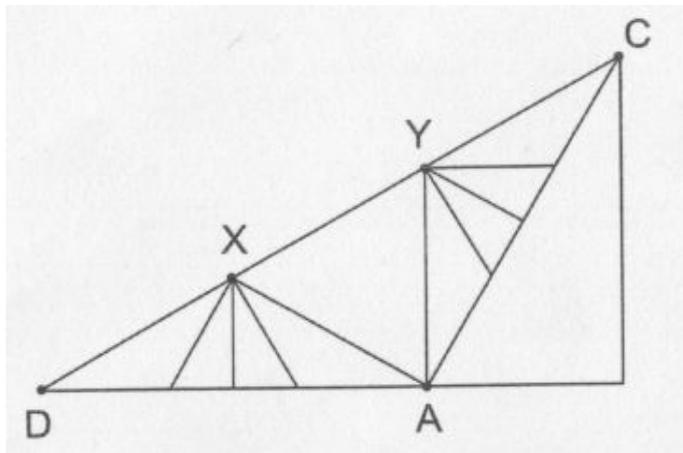
Strecken	
Länge	Anzahl
a	1
$\frac{1}{3}a$	4
$\frac{1}{3^2}a$	4^2
\vdots	\vdots
$\frac{1}{3^n}a$	4^n

$$L_\infty = a \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

- Die Koch-Kurve ist in ein **gleichschenkliges Dreieck** eingebettet, füllt dieses aber nicht aus.



$$\overline{DE} = a \quad \text{Höhe} = \frac{1}{6} a \sqrt{3}$$



Inhalt des Grenzdreiecks: $F_G = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{6} a \sqrt{3} = \frac{1}{12} a^2 \sqrt{3}$.

Inhalt des ersten ausgestülpten Dreiecks ABC :

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{6} \sqrt{3} = \frac{1}{36} a^2 \sqrt{3}$$

Dreiecke

Fläche	Anzahl
F_1	1
$\frac{1}{9} F_1$	4
$\frac{1}{9^2} F_1$	4^2
\vdots	\vdots
$\frac{1}{9^n} F_1$	4^n

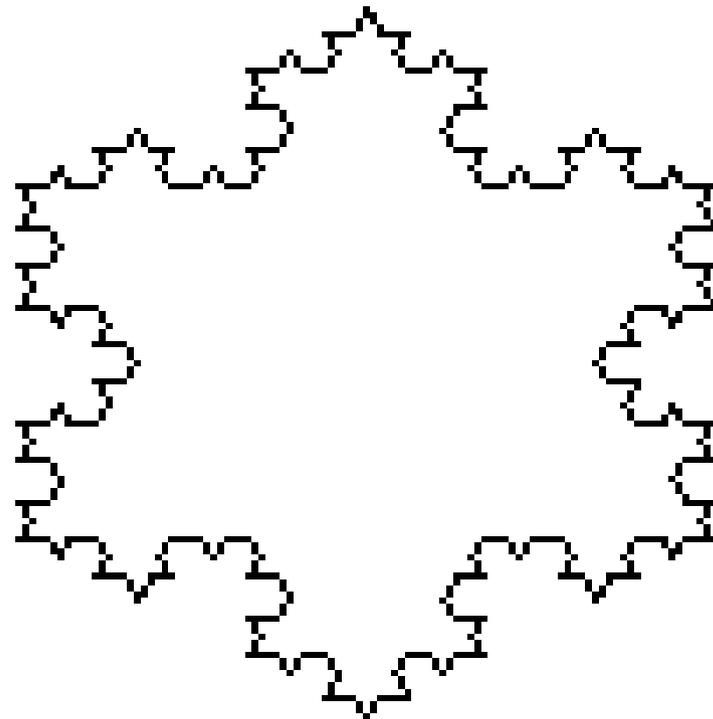
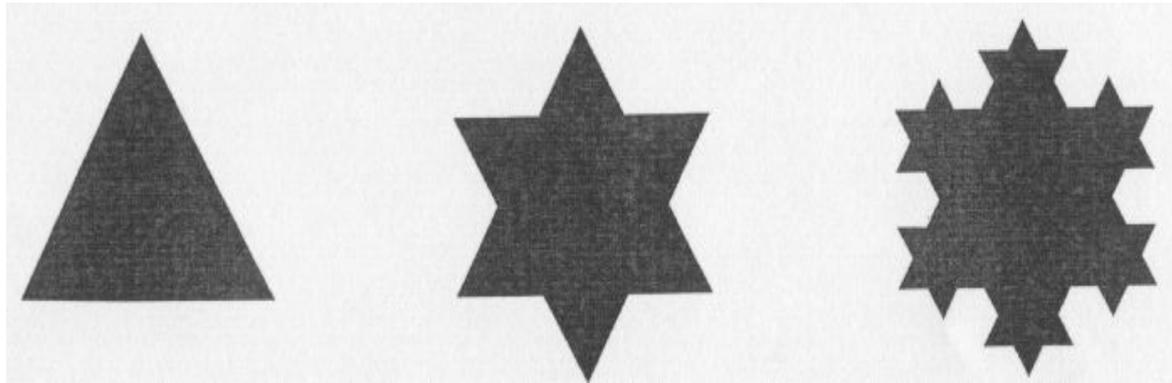
$$F_\infty = F_1 + 4 \cdot \frac{1}{9} F_1 + 4^2 \cdot \frac{1}{9^2} F_1 + \dots =$$

$$= F_1 (1 + \frac{4}{9} + (\frac{4}{9})^2 + \dots) = \quad (\text{geometrische Reihe})$$

$$= \frac{9}{5} F_1 = \frac{1}{20} a^2 \sqrt{3}$$

Wegen $F_\infty < F_G$ ist der Satz damit bewiesen.

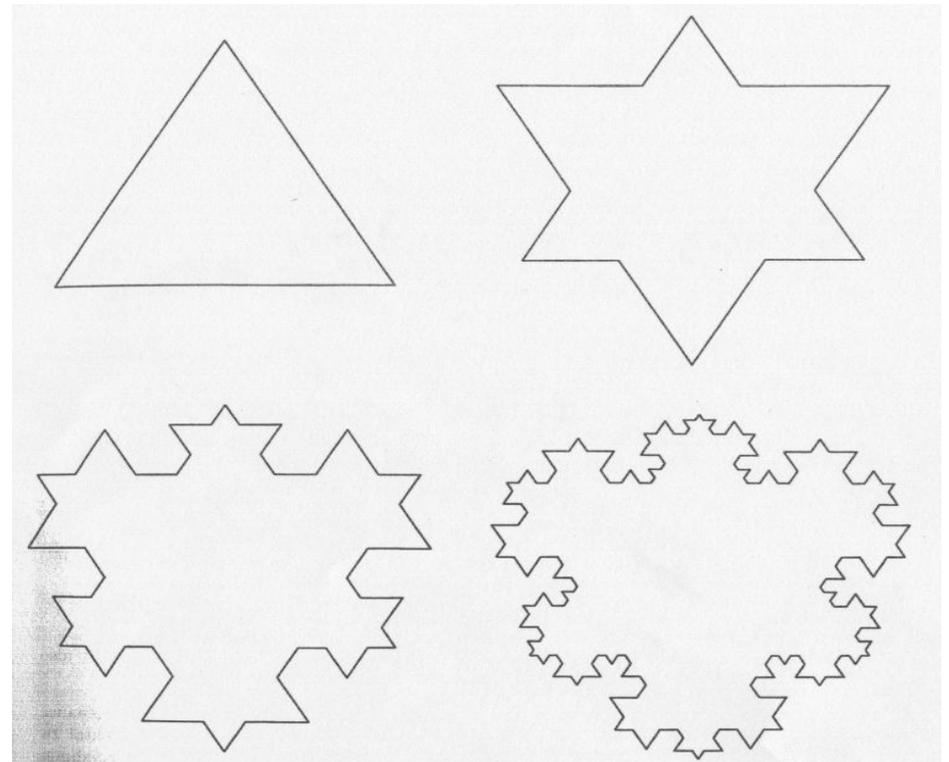
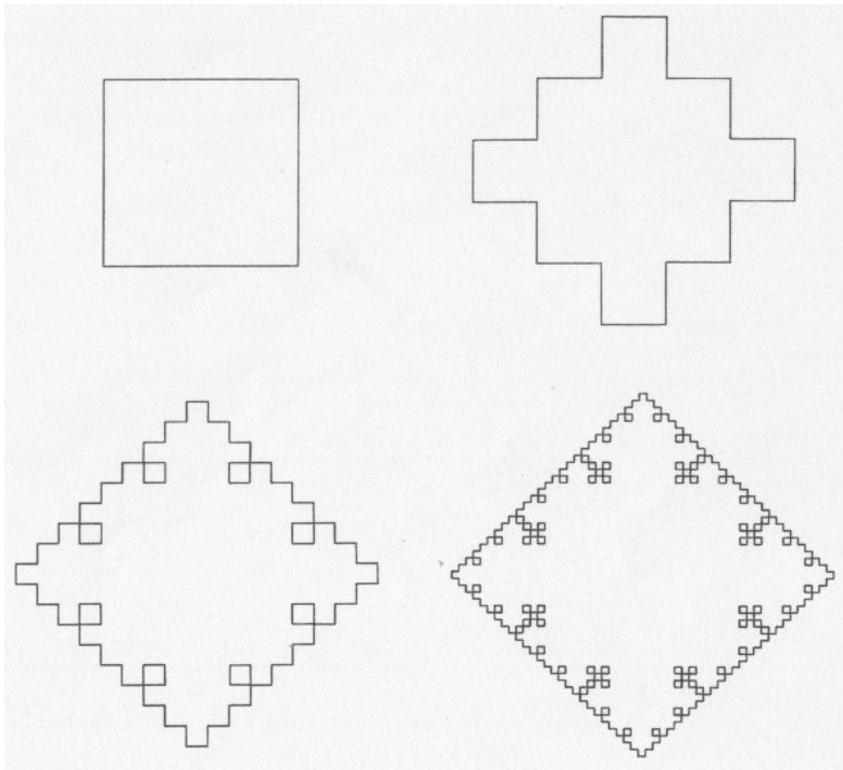
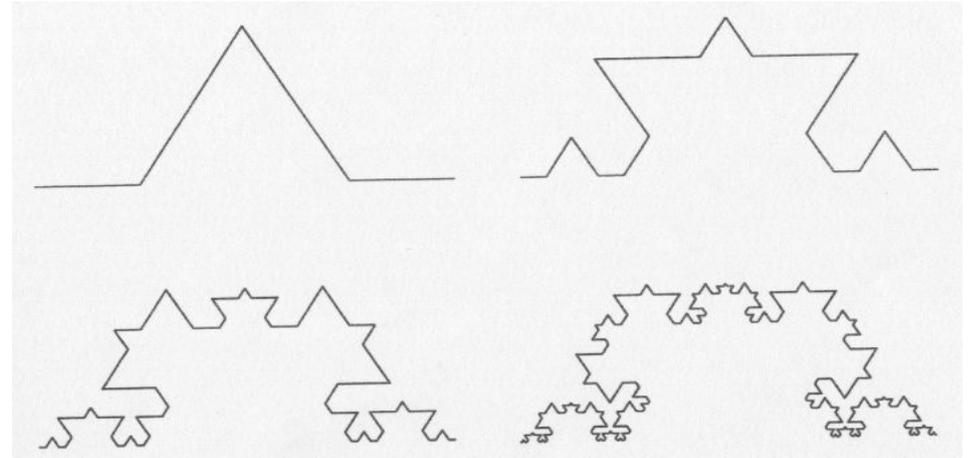
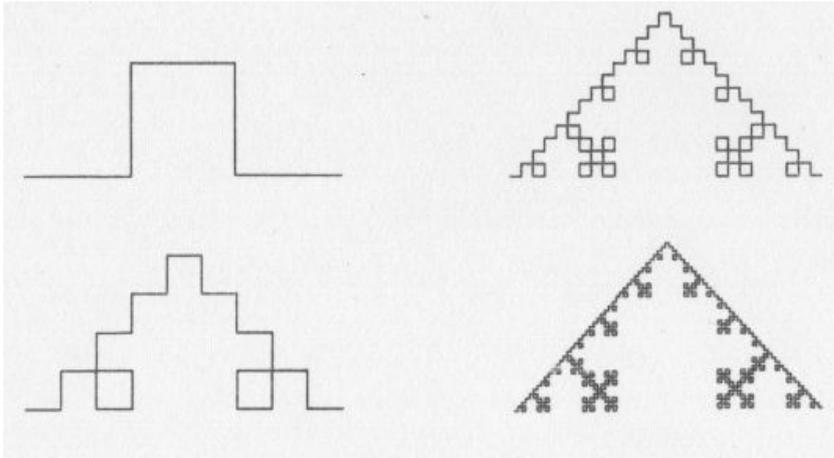
Die Schneeflockenkurve



Eigenschaften der Schneeflockenkurve

- Die Schneeflockenkurve ist **nicht selbstähnlich**.
- Die Schneeflockenkurve hat die **selbe Dimension** wie die Koch-Kurve.
- Die Länge der Schneeflockenkurve (Umfang) ist ∞
- Die ausgefüllte Schneeflocke ist in ein **reguläres 6-Eck** eingebettet, füllt dieses aber nicht aus.

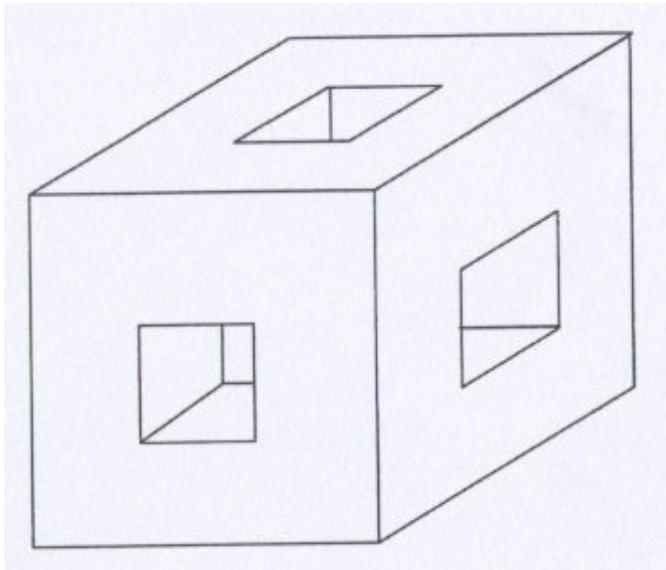
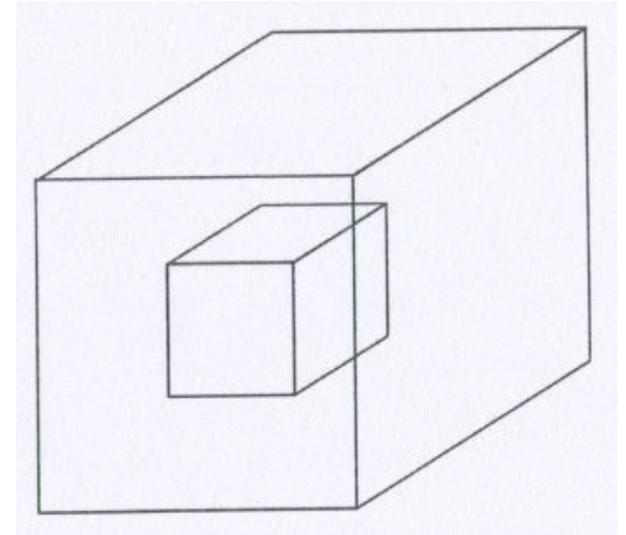
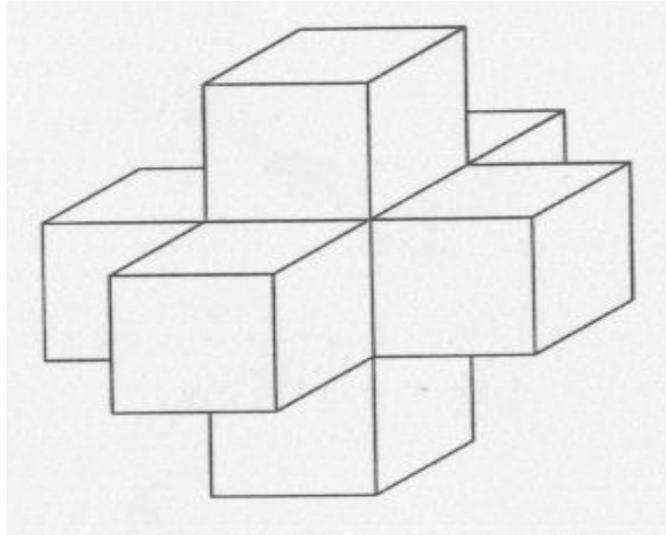
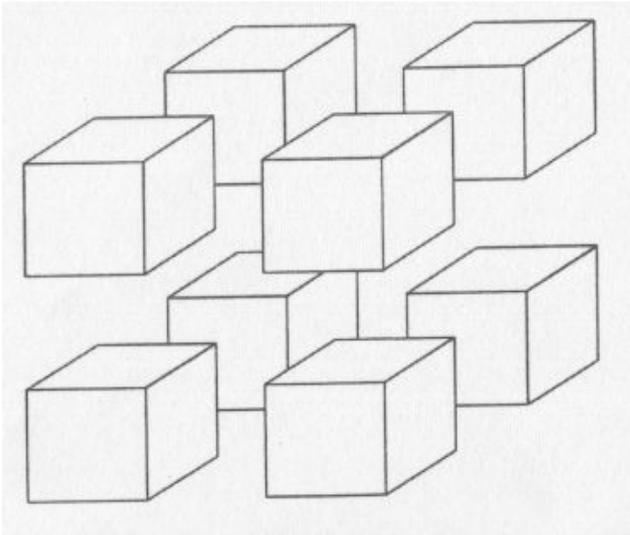
Weitere Beispiele für Koch-Kurven



Kapitel III - Beispiele

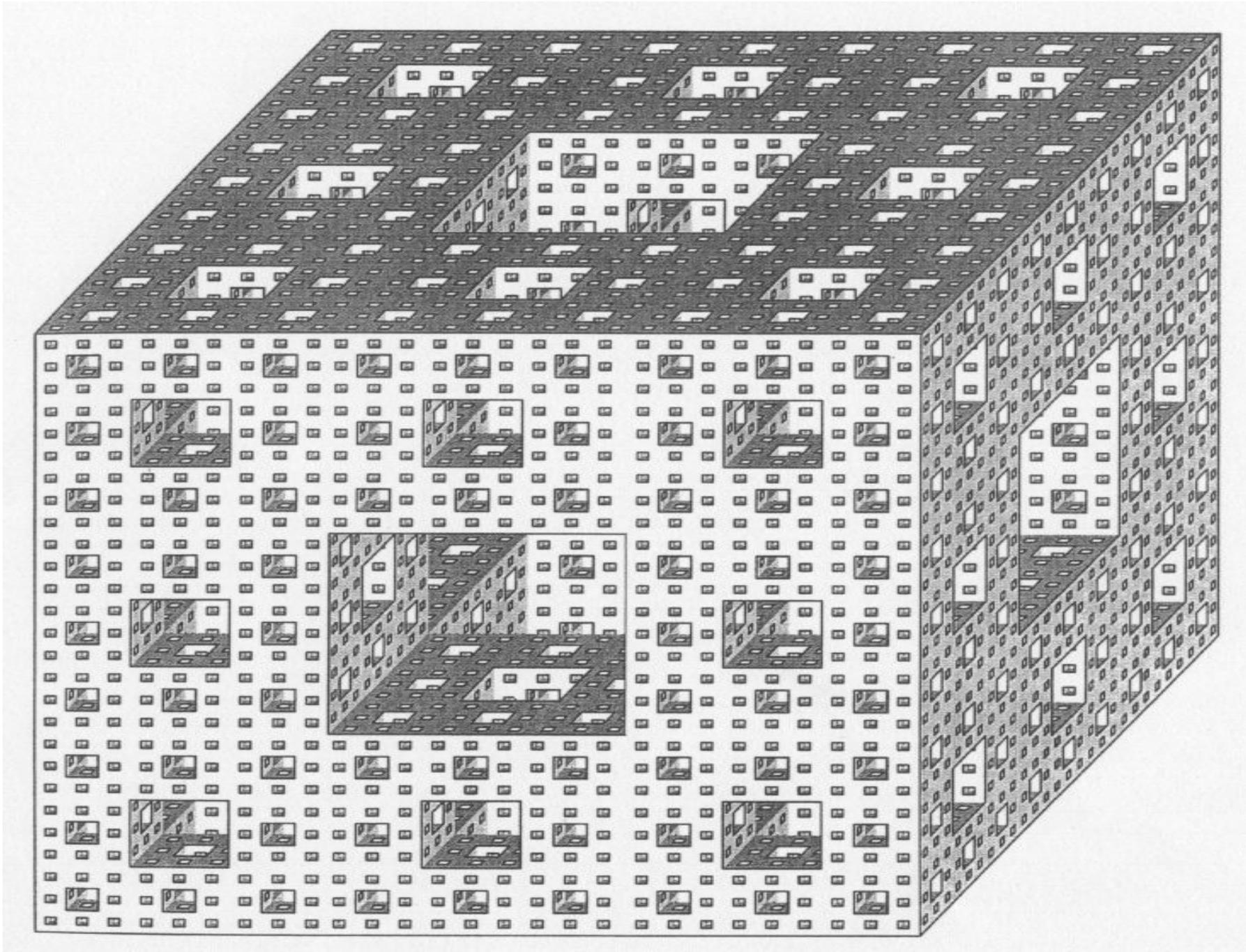
Fraktale höherer Dimension

Einfache Beispiele für selbstähnliche Mengen



$$N = 20, p = 3 \Rightarrow d_s = \frac{\log(20)}{\log(3)} \approx 2,7268$$

Der Menger-Schwamm (Karl Menger 1902 - 1985)



Das Volumen

Würfel	
Inhalt	Anzahl
V_0	1
$\frac{1}{27}V_0$	$27 - 7 = 20$
$\frac{1}{27^2}V_0$	20^2
\vdots	\vdots
$\frac{1}{27^n}V_0$	20^n

mit $V_0 = a^3$.

$$V_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} V_0 \left(\frac{20}{27}\right)^n = 0$$

Die Oberfläche

Beim Start haben wir die Oberfläche $F_0 = 6a^2$.

Nach der ersten Iteration bleiben noch 20 Würfel übrig. Hätten sie keine gemeinsamen Flächen, so gäbe es insgesamt $20 \cdot 6$ Quadrate des Inhalts $\frac{1}{9}a^2$. Das sind zuviele! Die 12 Kantenwürfel haben mit anderen Würfeln je zwei Quadrate und die 8 Eckenwürfel je drei gemeinsam. Dies bedeutet $F_1 = (20 \cdot 6 - 48) \frac{1}{9}a^2$.

Nach der zweiten Iteration bleiben noch 20^2 Würfel übrig. Hätten sie keine gemeinsamen Flächen, so gäbe es insgesamt $20^2 \cdot 6$ Quadrate, jedes mit Inhalt $\frac{1}{9^2}a^2$. Das sind zuviele! Im Innern eines einzigen Würfels der Kante $\frac{1}{3}a$ müssen 48, also $20 \cdot 48$ Flächen abgezogen werden. Nun haben aber diese Würfel selber Quadrate der Kante $\frac{1}{9}a$ gemeinsam und zwar $8 \cdot 48$. Dies bedeutet

$$F_2 = (20^2 \cdot 6 - 20 \cdot 48 - 8 \cdot 48) \frac{1}{9^2}a^2.$$

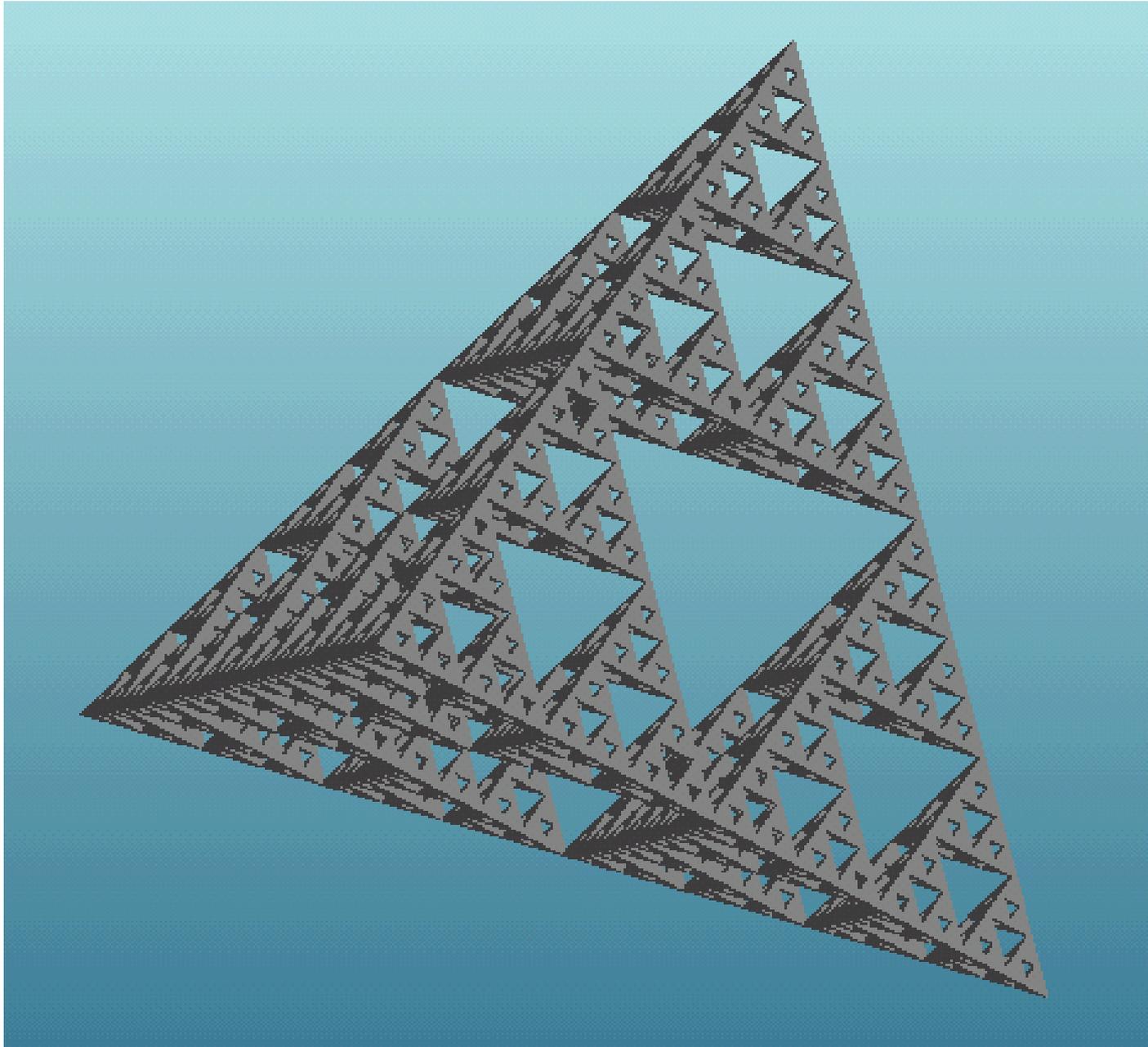
Mit vollständiger Induktion ergibt sich

$$\begin{aligned} F_n &= [20^n \cdot 6 - 48(20^{n-1} + 20^{n-2} \cdot 8 + \dots + 8^{n-1})] \frac{1}{9^n}a^2 = \\ &= 20^{n-1} [120 - 48(1 + \frac{2}{5} + \dots + (\frac{2}{5})^{n-1})] \frac{1}{9^n}a^2 = \\ &= \frac{1}{9} \cdot (\frac{20}{9})^{n-1} a^2 [120 - 48 \cdot \frac{5}{3} (1 - (\frac{2}{5})^n)] = \\ &= \frac{1}{9} \cdot (\frac{20}{9})^{n-1} a^2 [40 + 80 (\frac{2}{5})^n]. \end{aligned}$$

So erhalten wir

$$F_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \infty.$$

Der Tetraederkäse



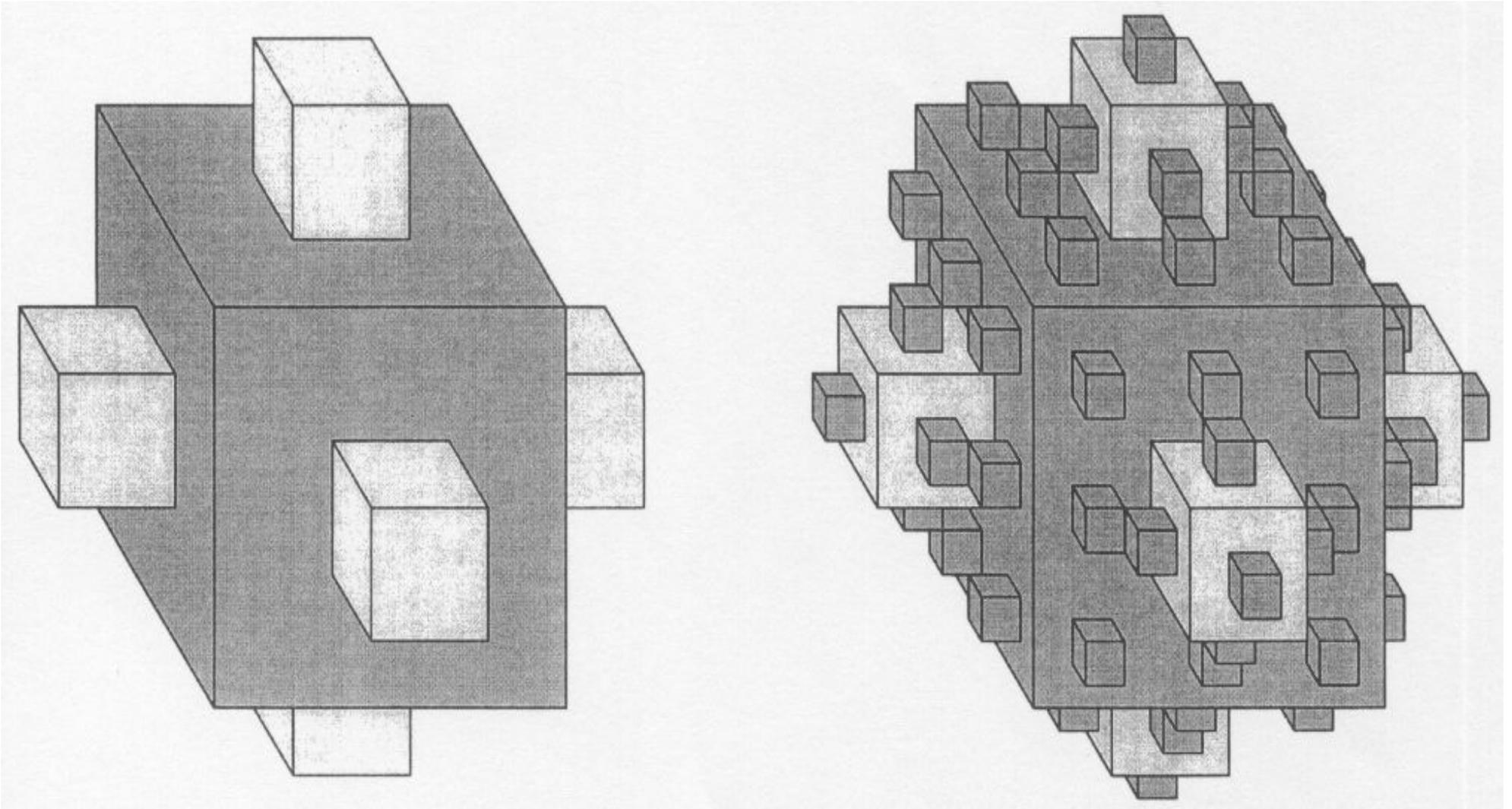
Definition (physiologische Flächen)

Motivation: Forscher aus der Anatomie suchen nach Modellen zur mathematischen Beschreibung von Lungen oder Nieren. Dabei stellen sie 4 Forderungen:

1. Die **Flächenmaßzahl** F_∞ soll **unendlich** groß sein.
2. Die Fläche soll in eine **Grenzfläche** (geschlossen & endlich) eingebettet sein. Diese Grenze wird **erreicht** aber **nicht überschritten**.
3. Der Grenzkörper und das **Flächenfraktal** besitzen die **selbe Volumenmaßzahl**.
4. Die **Fläche** soll **fraktal** sein. (Ungerade Dimension)

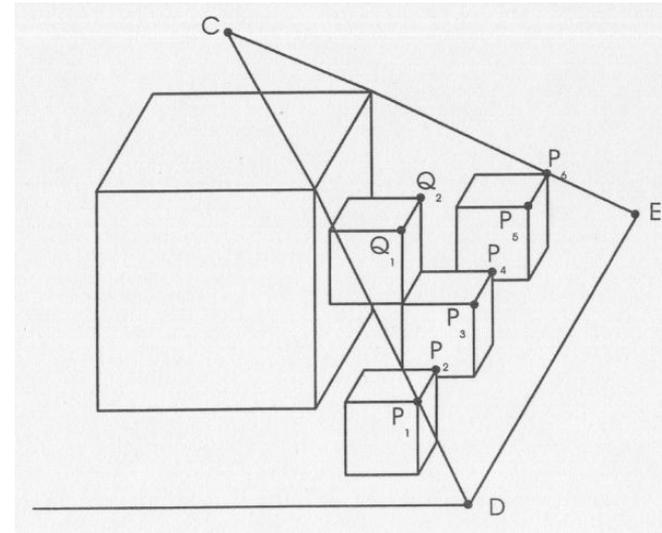
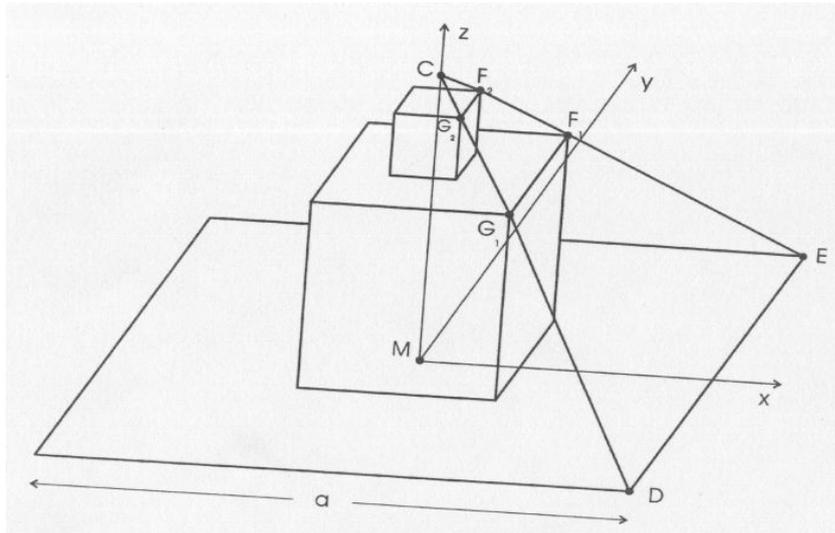
Flächen, die obige 4 Bedingungen erfüllen heissen **physiologisch**

Unser erstes Würfelfraktal



Eigenschaften

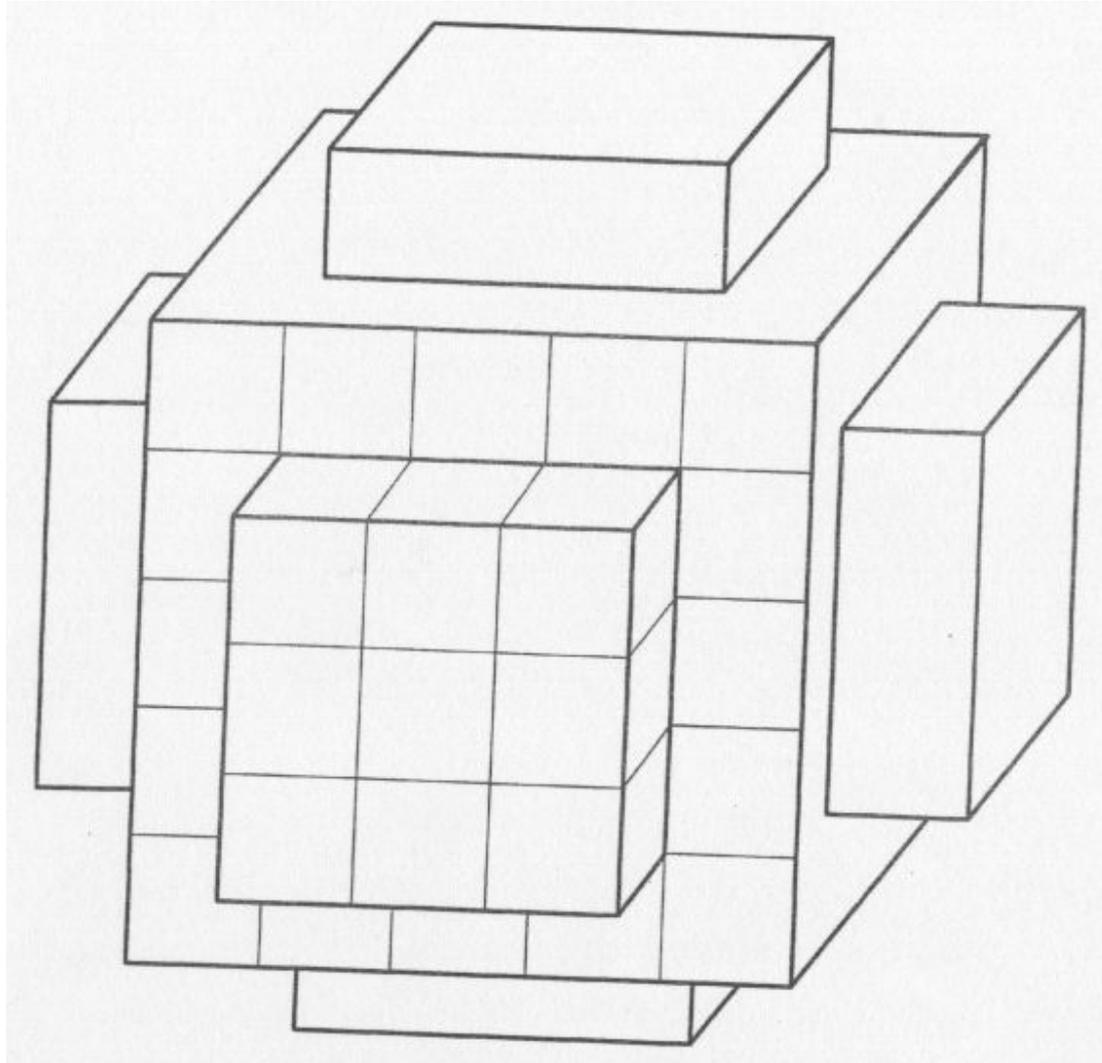
- Der Flächeninhalt F_∞ des W-Fraktals ist ∞
- Das Volumen V_∞ des W-Fraktals beträgt $\frac{10}{7} a^3$
- Das W-Fraktal ist in ein **Rhombendodekaeder** eingebettet mit dem Inhalt $V_G = a^3 + 6\left(\frac{1}{3} a^2 \frac{1}{2} a\right) = 2a^3$



- Das W-Fraktal ist **selbstähnlich** mit $N = 13$ und $p = 3$

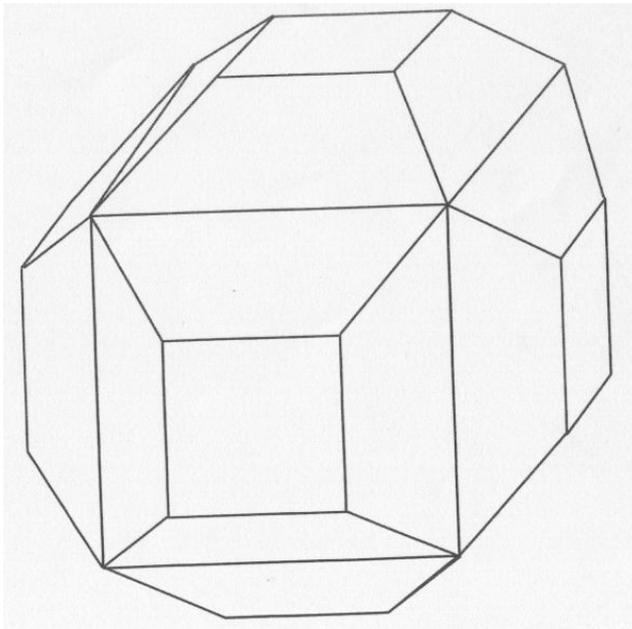
$$d_s = \frac{\log(13)}{\log(3)} \approx 2,3347$$

Ein weiteres Würfelfraktal



Eigenschaften

- Der Flächeninhalt F_∞ des neuen W-Fraktals ist ∞
- Das Volumen V_∞ des neuen W-Fraktals beträgt $\frac{71}{44} a^3$
- Das W-Fraktal ist in ein **gestutztes Rhombendodekaeder** eingebettet mit dem Inhalt



$$V_G = \frac{15}{8} a^3$$

- Das W-Fraktal ist **selbstähnlich** mit $N = 37$ und $p = 5$

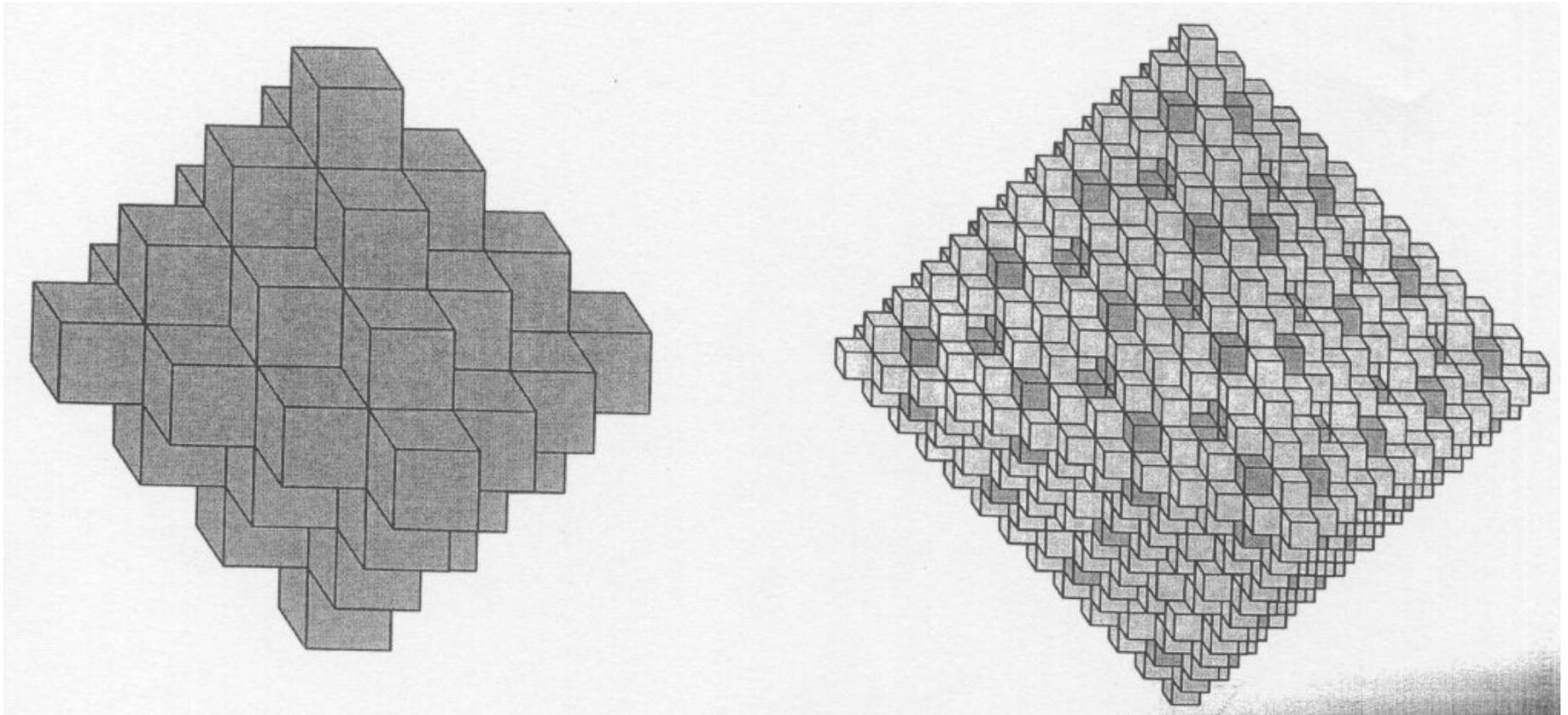
$$d_s = \frac{\log(37)}{\log(5)} \approx 2,243$$

Das SG-Fraktal (Alan St. George - Bildhauer)

Bisher haben wir zwei Würfelfraktale betrachtet.

1. Würfelfraktal füllt den Grenzkörper zu 71 % aus.
2. Würfelfraktal füllt den Grenzkörper zu 86 % aus.

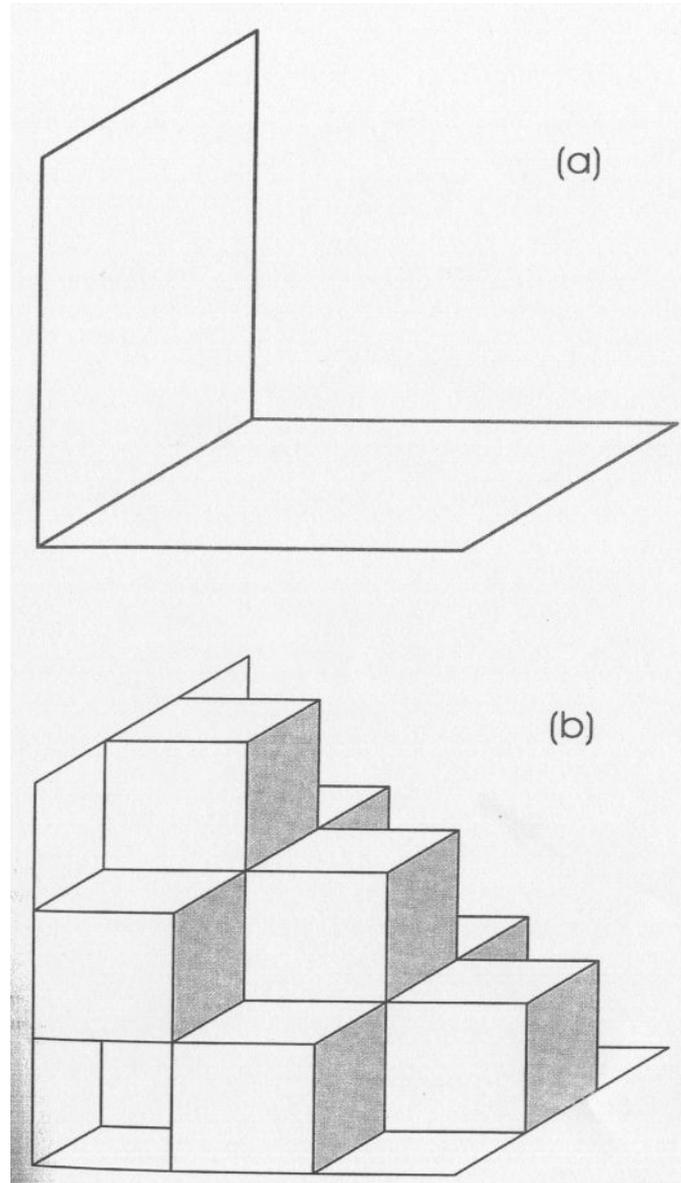
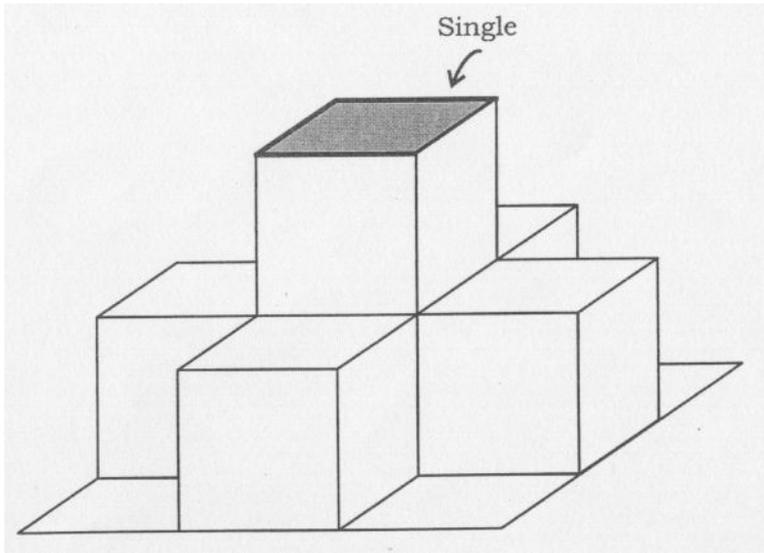
Beide Würfelfraktale waren also **nicht physiologisch**.



Eigenschaften

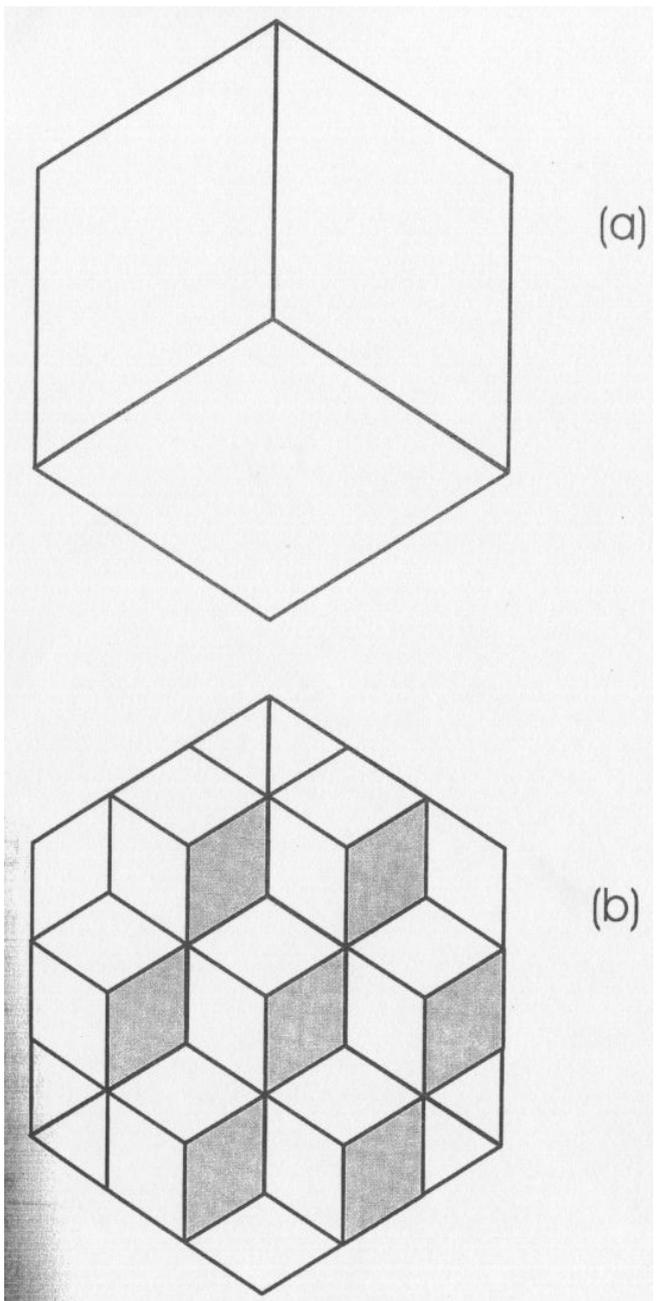
- Es gibt 5 Typen von Quadratkonfigurationen in einer Generation

Typ A: Single

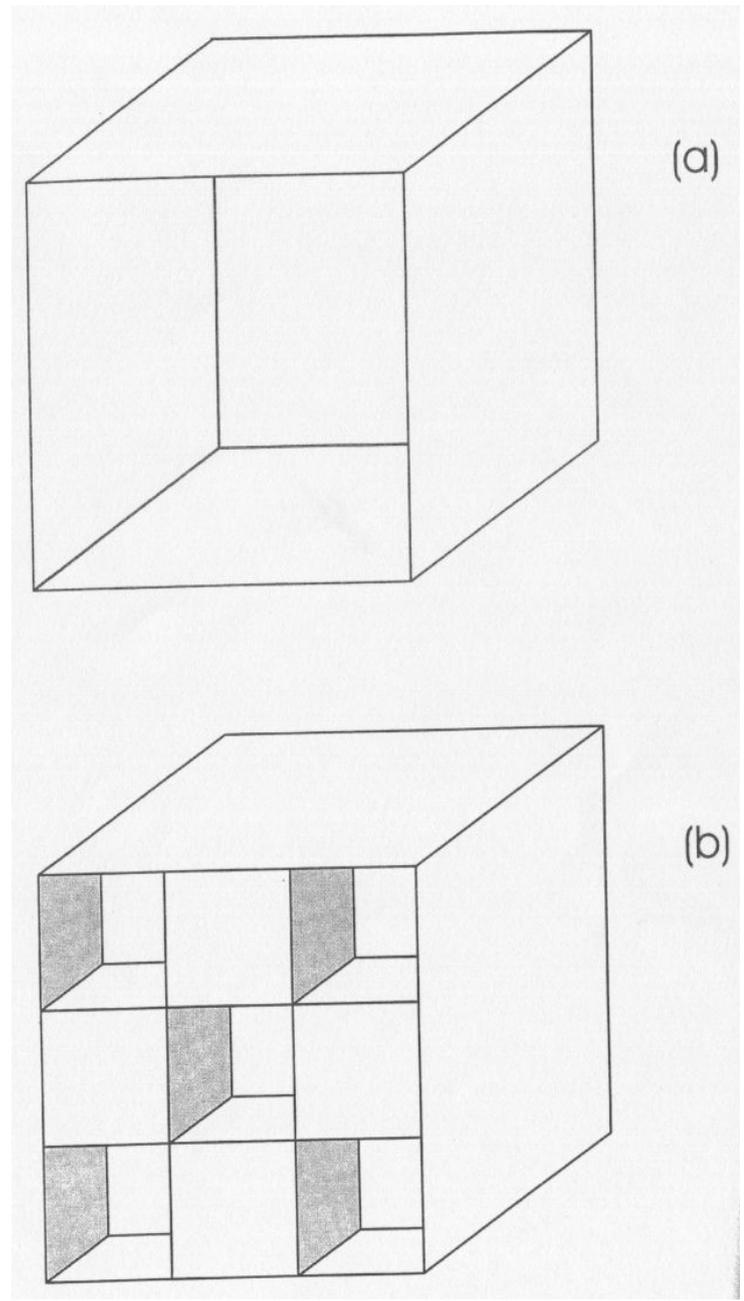


Typ B: Treppe

Typ C: Ecke



Typ D: Höhle



Typ E: Kaverne

„Wachstum nach innen“

- Zwei Würfel einer Generation sind entweder **disjunkt** oder **fallen zusammen** oder **schneiden sich längs einer Würfelkante** bzw. **Würfelfläche**.
- Würfel verschiedener Generation sind entweder **disjunkt** oder sie **schneiden sich längs einer Seitenfläche**.
- Jeder Quadrattyp der Generation n erzeugt in Generation $n+1$ folgende neue Typen:

$n \setminus n+1$	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	Würfel
<i>A</i>	1	6	4	0	0	6
<i>B</i>	0	5	6	2	0	10
<i>C</i>	0	3	6	3	1	13
<i>D</i>	0	2	0	5	4	18
<i>E</i>	0	0	0	0	8	19

Rekursionsformeln für die Anzahl der Typen:

$$A(n+1) = A(n)$$

$$B(n+1) = 6A(n) + 5B(n) + 3C(n) + 2D(n)$$

$$C(n+1) = 4A(n) + 6B(n) + 6C(n)$$

$$D(n+1) = 2B(n) + 3C(n) + 5D(n)$$

$$E(n+1) = C(n) + 4D(n) + 8E(n)$$

Explizite Lösung der Differenzengleichung:

$$A(n) = 6\lambda_1^n$$

$$B(n) = -24\lambda_1^n - 18\lambda_2^n - \frac{159}{73}\sqrt{73}\lambda_4^n + 21\lambda_4^n + \frac{159}{73}\sqrt{73}\lambda_5^n + 21\lambda_5^n$$

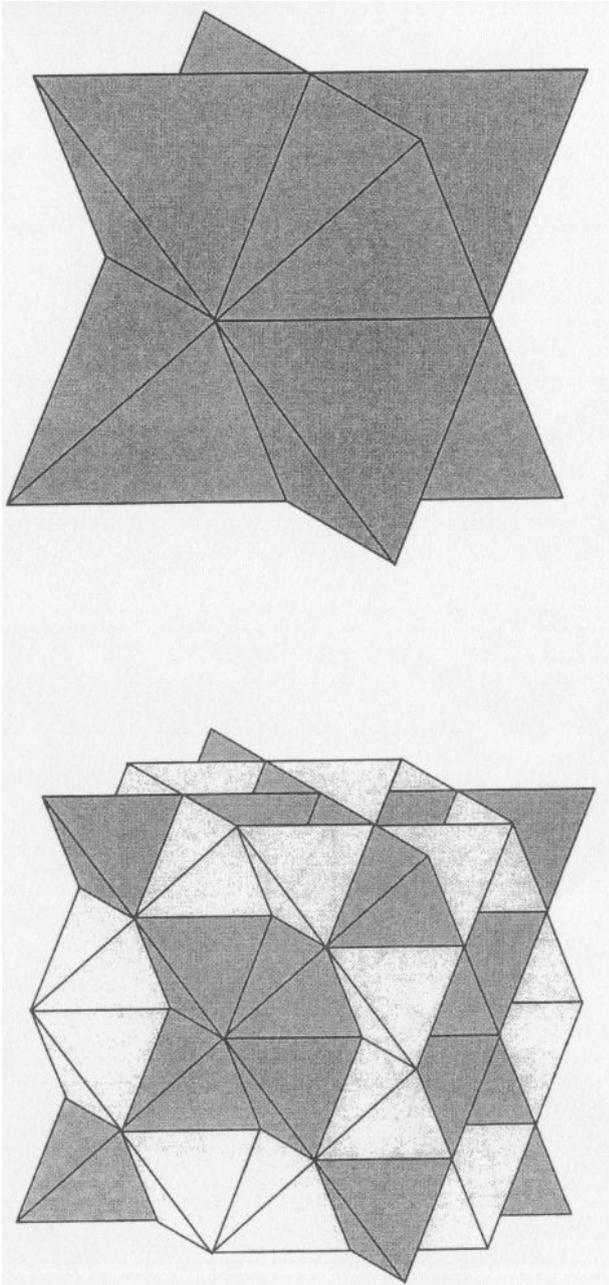
$$C(n) = 24\lambda_1^n + 36\lambda_2^n + \frac{282}{73}\sqrt{73}\lambda_4^n - 30\lambda_4^n - \frac{282}{73}\sqrt{73}\lambda_5^n - 30\lambda_5^n$$

$$D(n) = -6\lambda_1^n - 36\lambda_2^n - \frac{159}{73}\sqrt{73}\lambda_4^n + 21\lambda_4^n + \frac{159}{73}\sqrt{73}\lambda_5^n + 21\lambda_5^n$$

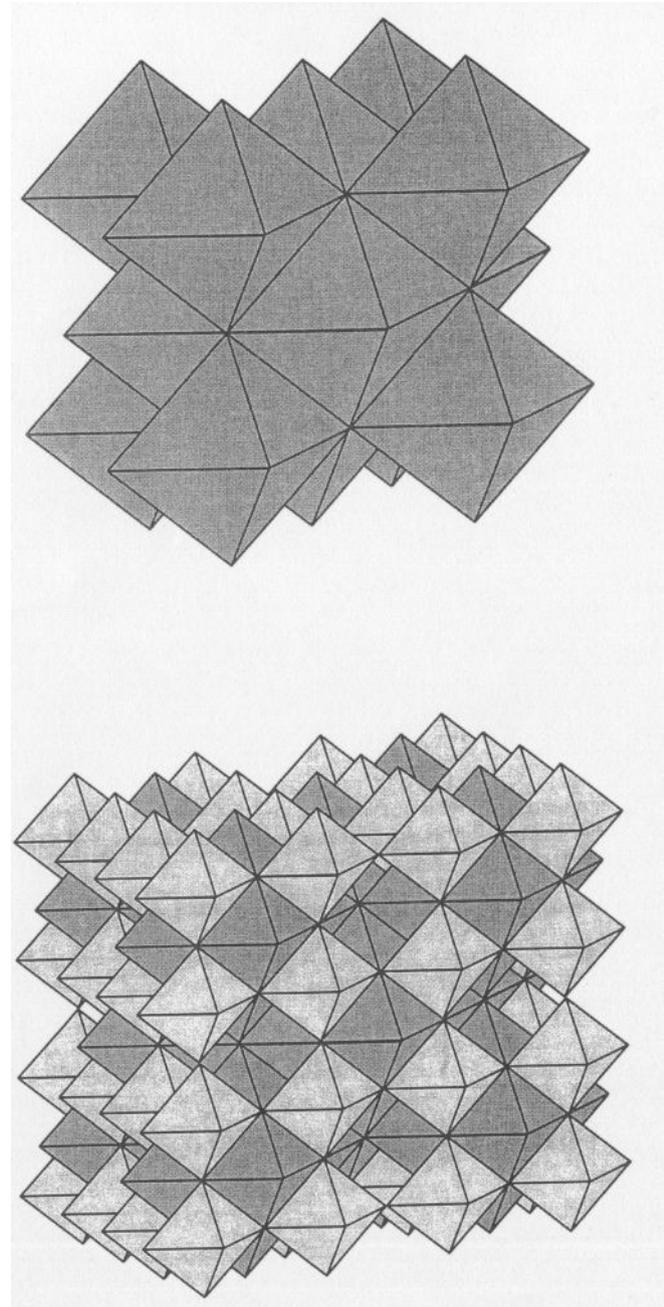
$$E(n) = \frac{108}{5}\lambda_2^n - \frac{48}{5}\lambda_3^n + \frac{90}{73}\sqrt{73}\lambda_4^n - 6\lambda_4^n - \frac{90}{73}\sqrt{73}\lambda_5^n - 6\lambda_5^n$$

- Der Flächeninhalt F_∞ des SG-Fraktals ist ∞
- Das Volumen V_∞ des SG-Fraktals beträgt $\frac{585}{134} a^3$
- Das SG-Fraktal ist in ein Oktaeder eingebettet mit dem Inhalt $V_G = \frac{9}{2} a^3$
- Das SG-Fraktal ist **nicht selbstähnlich** im strengen Sinn.
- Das SG-Fraktal hat die Dimension $d = \frac{\log \frac{1}{2} (13 + \sqrt{73})}{\log(3)} \approx 2,16359$
- Das SG-Fraktal füllt das **Grenzoktaeder** zu 97 % aus.

Tetraeder-Fraktal



Oktaeder-Fraktal



Weitere Fraktale und höhere Dimensionen

Die bisherigen Verfahren klappen nicht mit

- **Ikosaeder**-Fraktalen
- **Dodekaeder**-Fraktalen

Fraktale in Dimension 4 und höher:

- **Würfel**-Fraktale lassen sich völlig **analog** zu den bisherigen Verfahren konstruieren und berechnen.
- Andere **Polyeder** scheitern daran, dass sie sich nicht mehr in **kongruente Teilflächen** zerlegen lassen.
(Man muss neue Verfahren konstruieren)

Kapitel IV

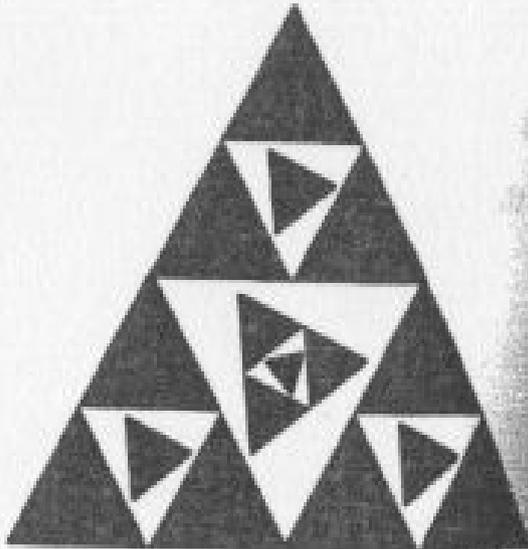
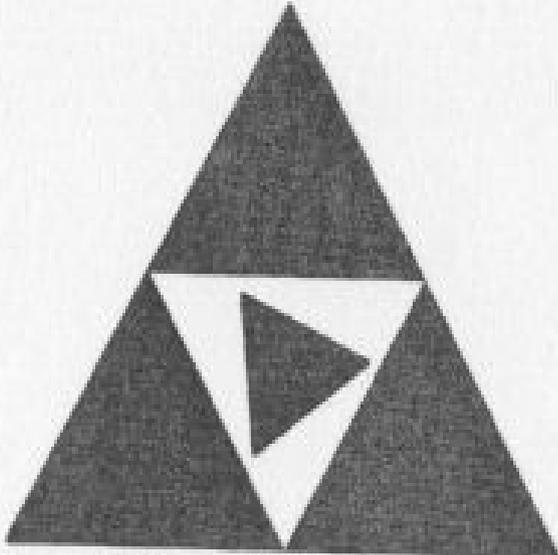
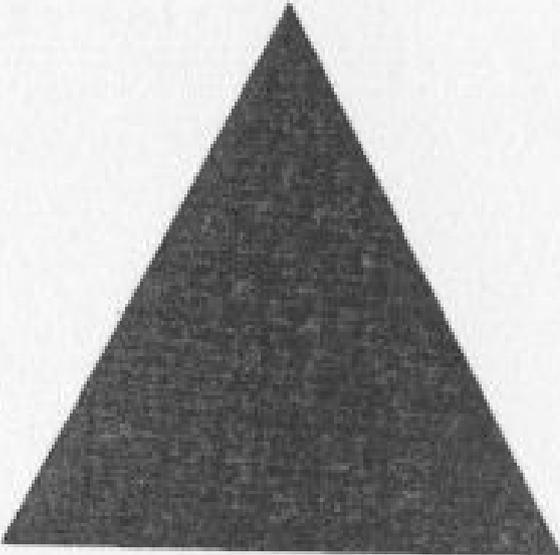
Selbstähnlichkeit im weiteren Sinn

Definition (Selbstähnlichkeit im weiteren Sinn)

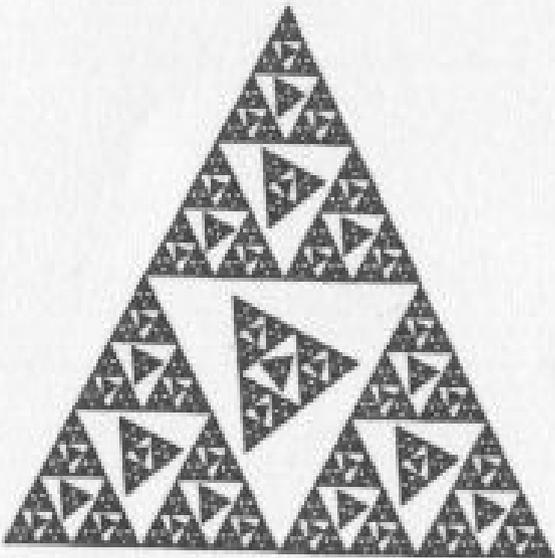
Gegeben sei eine kompakte Punktmenge G in einem metrischen Raum. Sie werde in $N > 1$, bis auf Randelemente paarweise disjunkte, Kongruente Teilmengen $G_i, i \in \{1, 2, \dots, N\}$ zerlegt, also $G = \bigcup_{i=1}^N G_i$. Wenn es dann für alle i eine Ähnlichkeitsabbildung γ_i mit $\gamma_i(G_i) = G$ gibt, dann heisst G selbstähnlich im weiteren Sinn. Die Ähnlichkeitsfaktoren seien p_i und es gelte $p_i > 1$.

Worin besteht der Unterschied zur Definition „im strengen Sinn“?

Sierpinski-Dreieck mit Variationen



...

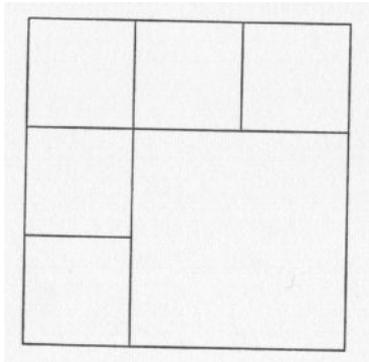


Und wieder ein „neuer“ Dimensionsbegriff

- Bisherige Dimension galt nur für Punktmengen die selbstähnlich im strengen Sinn waren. Wir benötigen also eine Erweiterung.

Wir definierten: $d_s = \frac{\log(N)}{\log(p)}$ oder $N = p^{d_s}$ also $N \cdot q^{d_s} = 1$ mit $q = \frac{1}{p} < 1$

Beobachtungen:

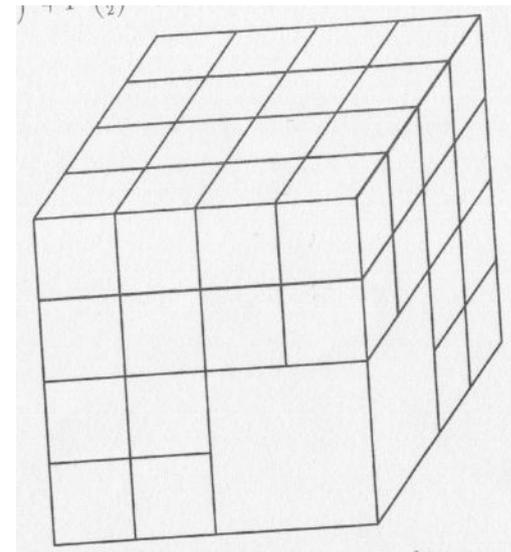


$$N_1 = 5, p_1 = 3, q_1 = \frac{1}{3}$$

$$N_2 = 1, p_2 = \frac{3}{2}, q_2 = \frac{2}{3}$$

$$N = N_1 + N_2 = 6$$

$$N_1 q_1^2 + N_2 q_2^2 = 5 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$$



$$N_1 q_1^3 + N_2 q_2^3 = 56 \left(\frac{1}{4}\right)^3 + 1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1$$

Definition \bar{d}_S

Punktmenge G , die im weiteren Sinne selbstähnlich sind mit N_i und $p_i > 1$, sowie $N = \sum N_i$ besitzen die Dimension \bar{d}_S , wobei $\sum N_i \cdot (q_i)^{\bar{d}_S} = 1$

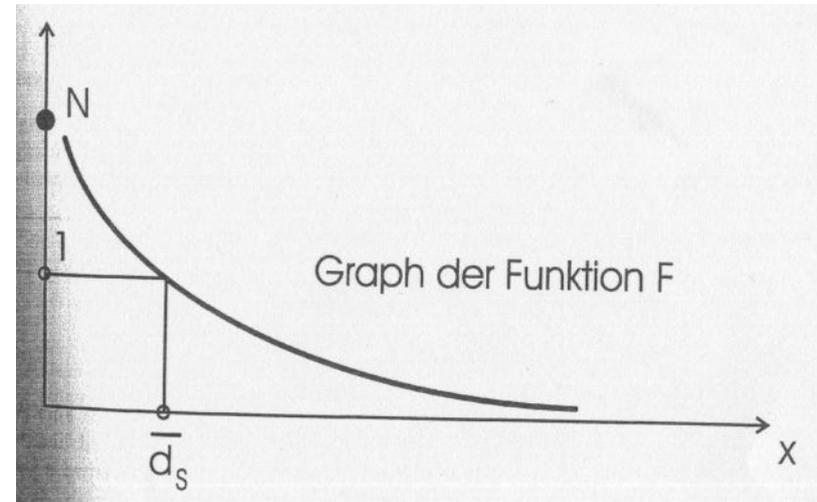
Existenz von \bar{d}_S

$$N_i \cdot (q_i)^x = \underbrace{(q_i)^x + (q_i)^x + \dots + (q_i)^x}_{N_i \text{ Summanden}} = \sum_{i=1}^N q_i^x$$

Betrachte die Funktion $F : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad x \rightarrow \sum_{i=1}^N q_i^x$

mit den Eigenschaften

- $F(x)$ ist stetig, weil q_i^x stetig ist.
- $F(x) > 0$ weil $x \in \mathbb{R}_0^+$ und $q_i > 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$ weil $0 < q_i < 1$ also $\lim_{x \rightarrow \infty} q_i^x = 0$
- $F(0) = N > 1$ weil $q_i^0 = 1$
- $F'(x) = \sum_{i=1}^N q_i^x \cdot \log q_i < 0$ denn $q_i^x > 0$ und $\log q_i < 0$ wegen $0 < q_i < 1$



F ist **streng monoton** fallend und mit dem **Zwischenwertsatz** folgt, dass **der Wert 1 genau einmal** angenommen wird.

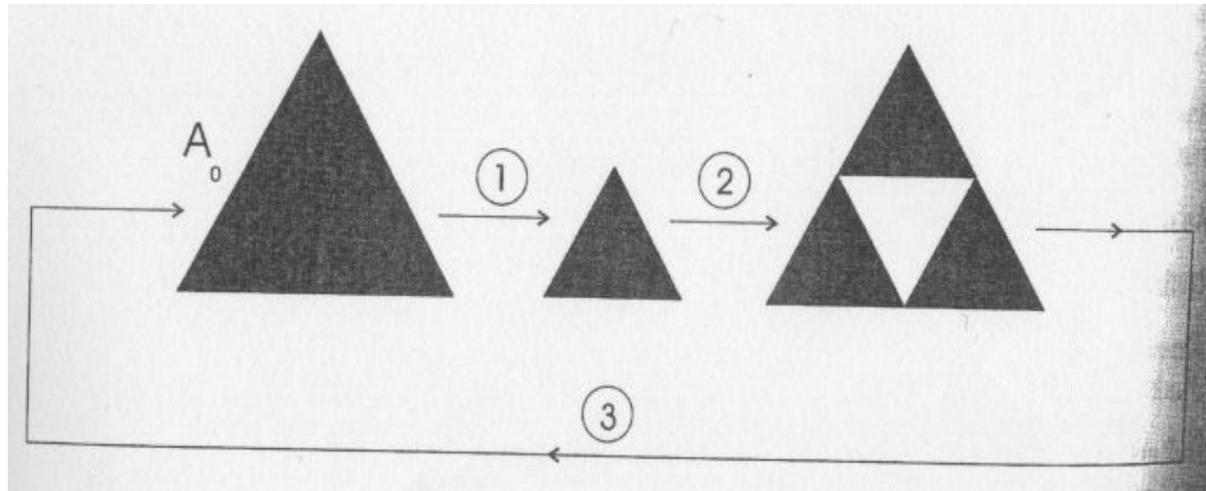
\overline{d}_s lässt sich oft nur **numerisch** bestimmen.

Kapitel V

Selbstaffinität

Die Barnsley-Maschine (Michael Barnsley)

3 Arbeitsgänge: Verkleinern, Kopieren & Anordnen, Iterieren



Realisierung mit Hilfe des Computers

$\beta: x' = Ax + t$ **affine** Abbildung

	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	t_1	t_2
β_1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0
β_2	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
β_3	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}\sqrt{3}$	$\frac{1}{6}\sqrt{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0
β_4	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{6}\sqrt{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}\sqrt{3}$

IFS-Code
(iteriertes Funktionen System)

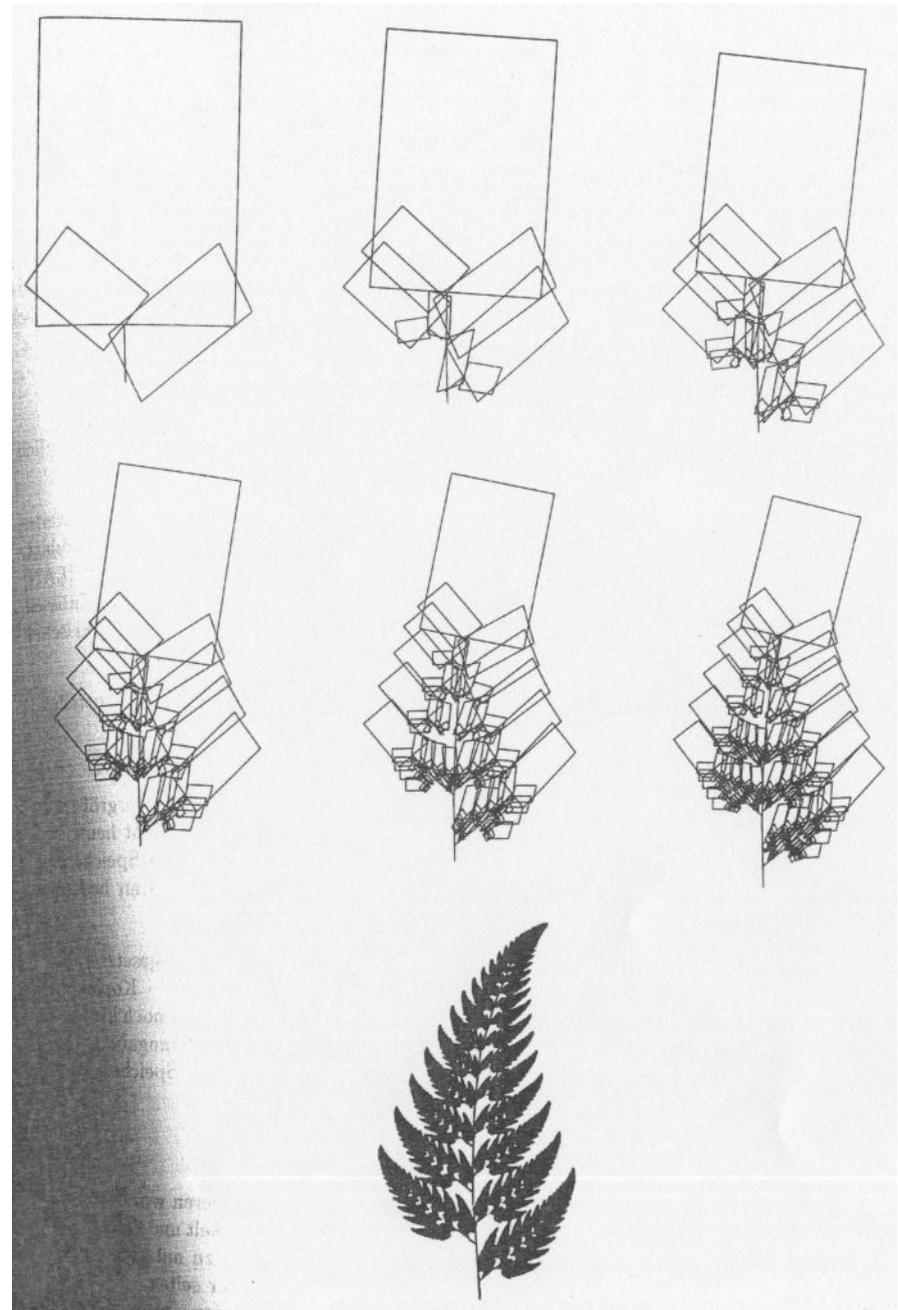
Definition (Selbstaffinität)

Gegeben sei eine kompakte Punktmenge G in einem metrischen Raum. Sie werde in $N > 1$, bis auf Randelemente paarweise disjunkte, Kongruente Teilmengen $G_i, i \in \{1, 2, \dots, N\}$ zerlegt, also $G = \bigcup_{i=1}^N G_i$. Wenn es dann für alle i affine Abbildungen γ_i mit $\gamma_i(G_i) = G$ gibt, dann heisst G **selbstaffin**.

Das Farnblatt

	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	t_1	t_2
β_1	0	0	0	0.16	0.45	-0.09
β_2	0.85	0.04	-0.04	0.85	0.07	0.16
β_3	0.2	-0.23	0.23	0.2	0.36	0.04
β_4	-0.15	0.28	0.26	0.24	0.52	0.08

(Michael Barnsley)



Die Verwendung von IFS-Codes

- Verwendung als **Bildkompression**
- Neue, **naturähnliche** Gebilde durch probieren
- Erschaffen von **Kulissen** in Hollywood.
- Schaffung von **ästhetischen Kunstwerken** durch Künstler

- Sehr wirtschaftlich, da **kleiner Speicherbedarf** im Vergleich zum Fernsehbild mit etwa 500 000 Pixeln.

- Barnsley:
- Interesse am codieren von beliebigen Bildern mit Hilfe von **affinen Transformationen**.
 - Ließ sich solche Verfahren patentieren und nutzt sie kommerziell (Folge: kaum wissenschaftliche Publikationen)

Wird man künftig neue Sätze & Beweise patentieren?

Zusammenfassung & Ausblick

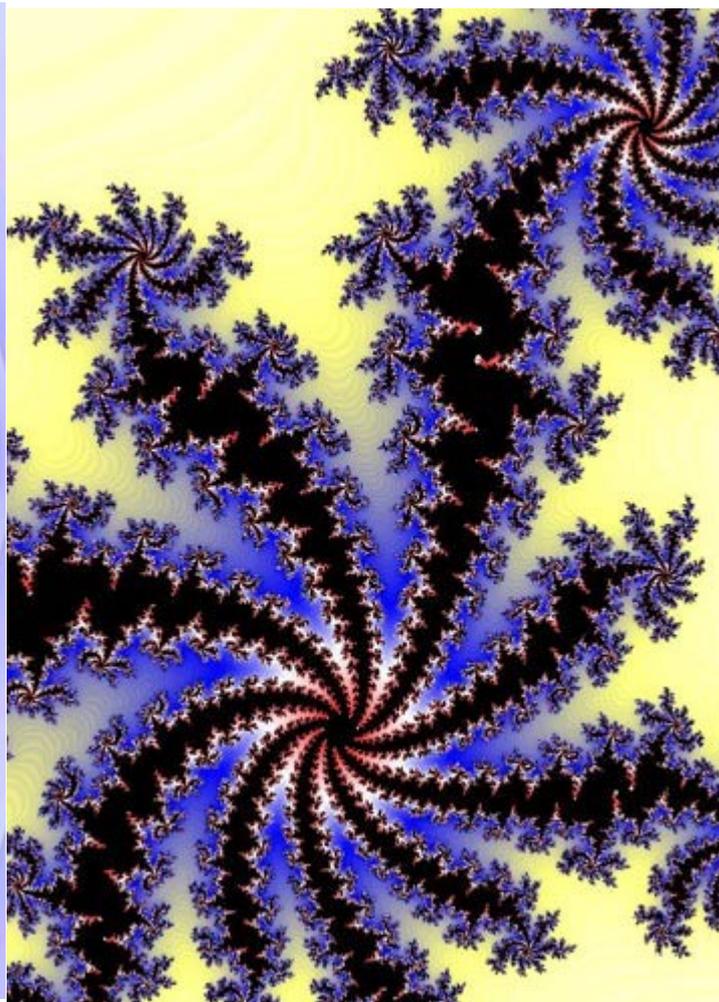
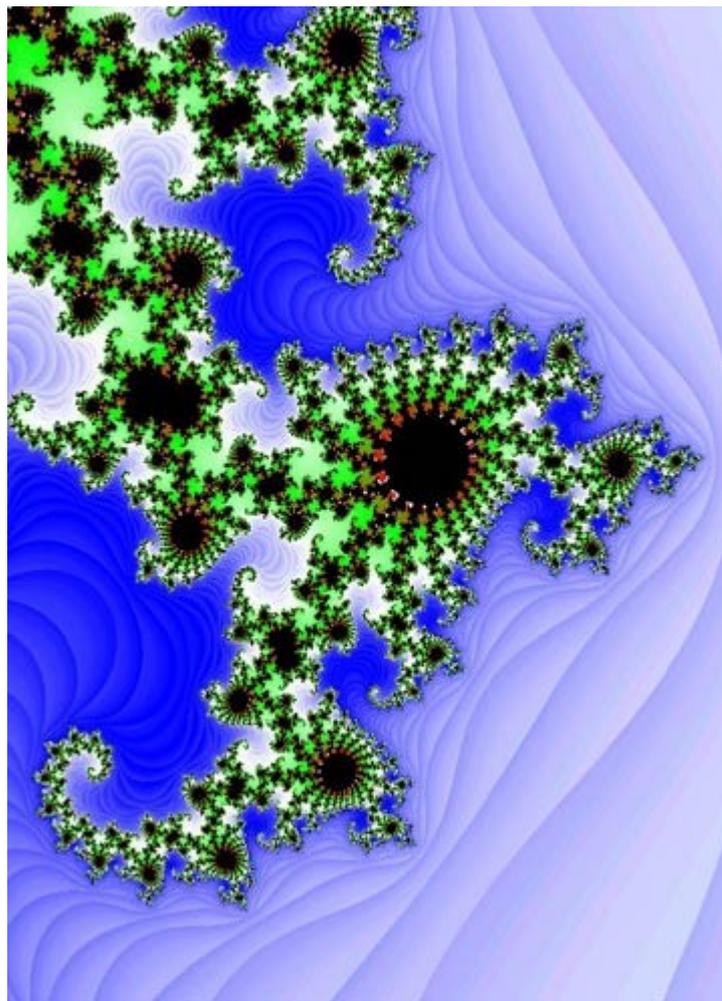
Wir haben gesehen:

- 3 Definitionen für den Begriff der **Selbstabbildung**
- 3 Definitionen für den Begriff der **Dimension**
- 2 Verfahren für die **Konstruktion** von Fraktalen

Was erwartet uns in den folgenden Vorträgen?

- Vertiefung der angesprochenen Sachverhalte
- Bessere Definition für die 'Dimension' & 'Selbstabbildung'
- Konkrete Anwendungen von Fraktalen
- Fraktale und der Zufall

Das Allerletzte



Literatur

- Fraktale Geometrie – eine Einführung. H. Zeitler, D. Pagon. Vieweg, 2000.
- Chaos and Fraktals. New frontiers of science. H.-O. Pleitgen, H. Jürgens, D. Saupe. Second Edition, Springer, 2004
- Internet: Suchbegriffe „Fraktale“, „Sierpinski“, etc...