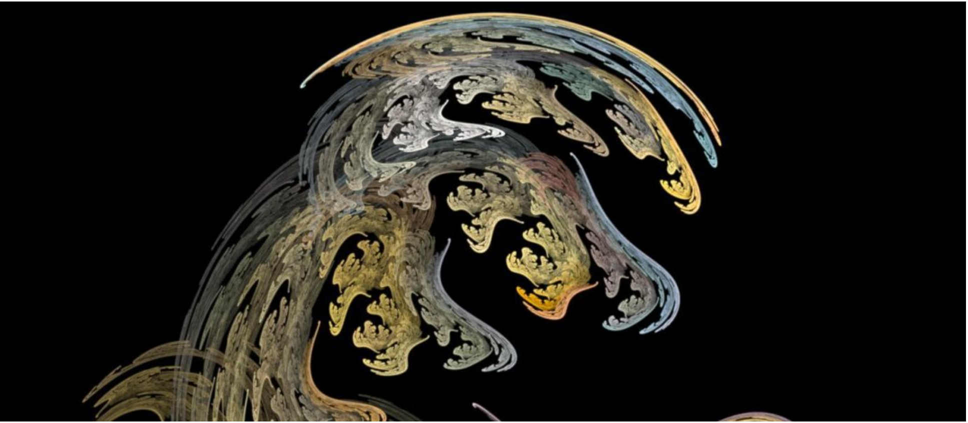
ulm university universität ulm



Selbstähnliche und selbstaffine Mengen

Mathias Göppel | 22. Januar 2007

Inhalt

Selbstähnliche und selbstaffine Mengen

Iterierte Funktionensysteme

Selbstähnlicher Mengen

Weiterführende Überlegungen

Selbstaffine Mengen

Anwendung auf Bildkodierung

Iteriertes Funktionensystem

Definition

Sei D eine geschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $S : D \rightarrow D$ heisst *Kontraktion*, falls es eine Konstante c mit $0 < c < 1$ derart gibt, dass $|S(x) - S(y)| \leq c|x - y|$ für alle $x, y \in D$ gilt.

Falls $|S(x) - S(y)| = c|x - y|$ gilt, so bildet S Mengen auf geometrisch ähnliche Mengen ab, und heisst dann *Kontraktionsähnlichkeit*. c wird dann auch *Skalierungsfaktor* genannt.

Iteriertes Funktionensystem

Definition

Sei D eine geschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $S : D \to D$ heisst *Kontraktion*, falls es eine Konstante c mit $0 < c < 1$ derart gibt, dass $|S(x) - S(y)| \leq c|x - y|$ für alle $x, y \in D$ gilt.

Falls $|S(x) - S(y)| = c|x - y|$ gilt, so bildet S Mengen auf geometrisch ähnliche Mengen ab, und heisst dann *Kontraktionsähnlichkeit*. c wird dann auch *Skalierungsfaktor* genannt.

Definition

Eine endliche Familie von Kontraktionen $\{S_1, ..., S_m\}$, mit $m \geq 2$, heisst *Iteriertes Funktionensystem* oder *IFS*. Eine kompakte Teilmenge F von D heisst *Attraktor* oder *invariante Menge* für ein IFS, falls

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F).$$

Hausdorffmetrik

Definition

Sei $\mathcal{S}$ das Mengesystem aller nicht-leeren, kompakten Teilmengen eines metrischen Raums. Die *Hausdorffmetrik auf* $\mathcal{S}$ d ist dann wie folgt definiert.

$$d(A, B) := \inf\{\delta : A \subset B_\delta \textit{ und } B \subset A_\delta\}$$

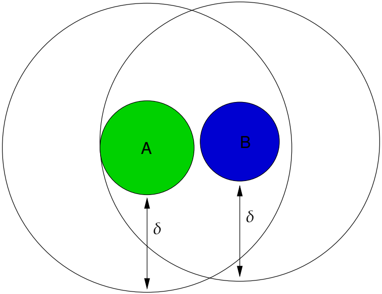


Abbildung: Veranschaulichung die Hausdorffmetrik

Existenz und Eindeutigkeit des Attraktors

Theorem

Betrachten wir das IFS, gegeben mittels der Kontraktionen $\{S_1, \ldots, S_m\}$ auf $D \subset \mathbb{R}^n$, so dass

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i |x - y| \tag{1}$$

mit $x, y \in D$ und $c_i < 1$ für alle i. Dann existiert ein eindeutiger Attraktor F, d.h. eine nicht-leere kompakte Menge, so dass

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F). \tag{2}$$

Theorem

Definieren wir ferner eine Abbildung S auf der Klasse $\mathcal{S}$ der nicht-leeren, kompakten Mengen wie folgt:

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E). \tag{3}$$

mit $E \in \mathcal{S}$ und schreiben S^k für die k-te Iteration von S (also $S^0(E) = E$ und $S^k(E) = S(S^{k-1}(E))$ für $k \geq 1$), dann gilt

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E) \tag{4}$$

für jede Menge $E \in \mathcal{S}$ mit $S_i(E) \subset E$ für alle i.

Beobachtung

Sei $E \in \mathcal{S}$ beliebig.

- $d(S^k(E), F) \longrightarrow 0 \ (k \to \infty)$
- $S^k(E) = \bigcup_{\mathcal{I}_k} S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_k}(E)$
  mit $\mathcal{I}_k = \{(i_1, \ldots, i_k) : 1 \leq i_j \leq m\}$.
- Falls $S_i(E) \subset E$:
  $F = \bigcup \{x_{i_1, i_2, \ldots}\}$
  mit $x_{i_1, i_2, \ldots} := \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_k}(E)$

Algorithmen

1.
   - Wähle initiale Menge E beliebig.
   - Stelle $S^k(E)$ für ein k das groß genug ist dar.
2.

   $x \in_R \mathbb{R}^n$;
   iteriere {
   $\quad i \in_R \{1, ..., m\}$;
   $\quad x = S_i(x)$
   $\quad$ male x sobald es „nahe genug" an F liegt;
   }

Selbstähnliche und selbstaffine Mengen

Iterierte Funktionensysteme

Selbstähnlicher Mengen

Weiterführende Überlegungen

Selbstaffine Mengen

Anwendung auf Bildkodierung

Definition

Falls ein IFS aus Kontraktionsähnlichkeiten $S1, ..., Sm$ auf dem R^n besteht, also

$$|S_i(x) - S_i(y)| = c_i|x - y|,$$

wird der Attraktor dieses IFS selbstähnliche Menge genannt.

Dimensionen selbstähnlicher Mengen: Betrachtung

Angenommen $0 \leq \mathcal{H}^s(F) \leq \infty$ mit s = $dim_H F$
und $F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$ eine „fast disjunkte" Vereinigung.

$$\mathcal{H}^s(F) = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{H}^s(S_i(F)) = \sum_{i=1}^{m} c_i^s \mathcal{H}^s(F)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1$$

Bedingung für offene Mengen

Definition

Gegeben ein IFS mit $S_1, ..., S_m$. Man sagt, die S_i erfüllen die *Bedingung für offene Mengen*, falls eine nicht-leere, beschränkte, offene Menge V existiert, so dass

$$V \supset \bigcup_{i=1}^{m} S_i(V)$$

eine disjunkte Vereinigung der $S_i(V)$ ist.

Lemma

Sei $\{V_i\}$ ein Mengensystem disjunkter, offener Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, so dass jedes V_i eine Kugel mit dem Radius $a_1 r$ beinhaltet und andereseits von einer Kugel mit Radius $a_2 r$ eingeschlossen wird. Dann schneidet jede Kugel B mit Radius r höchstens $(1+2a_2)^n a_1^{-n}$ der abgeschlossenen Mengen $\overline{V_i}$.

Beweis.

Falls $\overline{V_i}$ B schneidet, dann beinhaltet die Kugel mit gleichem Mittelpunkt wie B und Radius $(1+2a_2)r$ $\overline{V_i}$. Angenommen, dass q der Mengen aus $\{\overline{V_i}\}$ B schneiden, dann folgt aus der Aufsummierung der Volumina der eingeschlossenen Kugeln mit den Radien $a_1 r$, dass $q(a_1 r)^n \leq (1+2a_2)^n r^n$, woraus die behauptete Schranke für q folgt. □

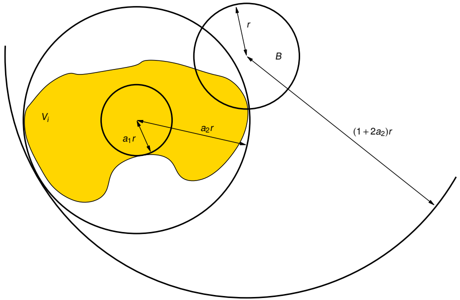


Abbildung: Veranschaulichung des Beweises von (2.1)

Berechnung der Dimension selbstähnlicher Mengen

Theorem

Vorrausgesetzt die Bedingung für offene Mengen (5) gilt für die Kontraktionsähnlichkeiten S_i auf $\mathbb{R}^n$ mit den Skalierungsfaktoren $0 < c_i < 1$ für $1 \leq i \leq m$. Falls F der Attraktor des IFS $\{S_1, \ldots, S_m\}$ ist, d.h.

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F), \tag{5}$$

dann ist $\dim_H F = \dim_B F = s$, wobei s durch die Lösung der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1 \tag{6}$$

gegeben ist. Ferner gilt für dieses s, $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

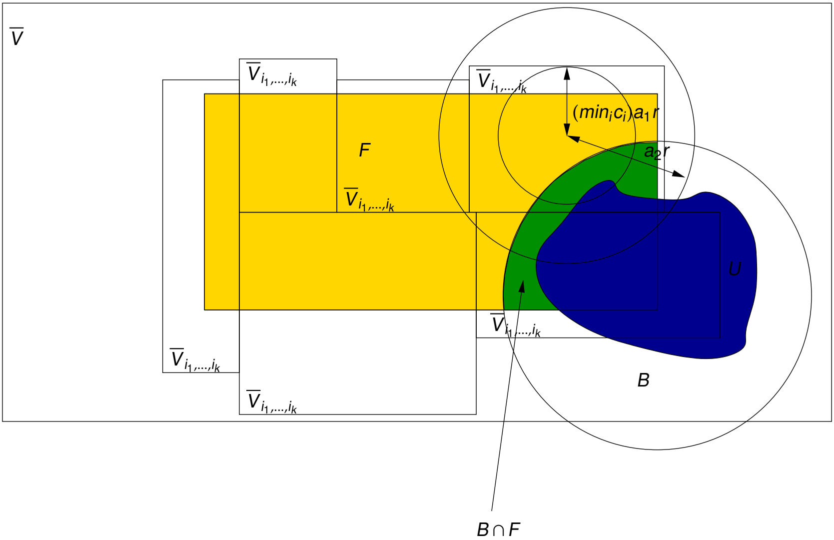


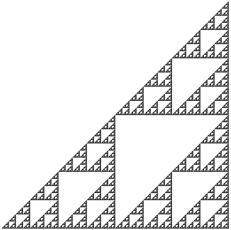
Abbildung: Beweisskizze

Beispiel

Das Sierpinsky-Dreieck F kann als der Attraktor der Kontraktionsähnlichkeiten

$$S_2(x) = \frac{1}{2}x,\ S_2(x) = \frac{1}{2}x + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix},\ S_3(x) = \frac{1}{2}x + \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

beschrieben werden. Die Bedingung für offene Mengen (5) ist für V als das Innere von E_0 gewählt erfüllt. Damit ist nach obigen Theorem $dim_H F = dim_B F = \log 3/\log 2$, was gerade die Lösung von $3(\frac{1}{2})^s = \sum_1^3 (\frac{1}{2})^s = 1$ ist.



Selbstähnliche und selbstaffine Mengen

Iterierte Funktionensysteme

Selbstähnlicher Mengen

Weiterführende Überlegungen

Selbstaffine Mengen

Anwendung auf Bildkodierung

Allgemeine untere Schranke

Proposition

Sei F der Attraktor eines IFS bestehend aus den Kontraktionen $S_1, \ldots, S_m$ auf einer abgeschlossenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. D.h. also, dass

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i |x - y|$$

mit $0 \leq c_i \leq 1$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$ für alle i erfüllt ist. Dann gilt:

$$\dim_H F \leq s \text{ und } \overline{\dim}_B F \leq s$$

wobei s die Lösung von $\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1$ ist.

Allgemeine obere Schranke

Proposition

Sei $\{S_1, \ldots, S_m\}$ *ein IFS auf einer abgeschlossenen Teilmenge D des* $\mathbb{R}^n$*, für das*

$$b_i|x-y| \leq |S_i(x) - S_i(y)| \tag{7}$$

mit $0 < b_i < 1$ *für alle i gilt. Angenommen der Attraktor F erfüllt*

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F), \tag{8}$$

wobei die Vereinigung disjunkt ist, dann ist F total unzusammenhängend und $\dim_H F \geq s$*, wobei s die Lösung von* $\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1$ *ist.*

Satz

Theorem

Sei $V \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Seien $S_1, \ldots, S_m$ Kontraktionen auf $\overline{V}$, die zweimal differenzierbar sind, und für die $a \leq |S_i'(\omega)| \leq c$ für alle i und $\omega \in V$ gilt, wobei $0 < a \leq c$ Konstanten sind. Angenommen die S_i erfüllen die Bedingung für offene Mengen mit der offenen Menge V, dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{k \to \infty} \left[\sum_{\mathcal{I}_k} |(S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_k})'(\omega)|^s \right] = \varphi(s) \tag{9}$$

für alle $s > 0$, ist unabhängig von $\omega \in V$ und ist fallend in s. Falls F der Attraktor des IFS ist, dann ist $\dim_H F = \dim_B F$ gleich der Lösung von $\varphi(s) = 1$ und F ist eine s-Menge, d.h. $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ für dieses s.

Selbstähnliche und selbstaffine Mengen

Iterierte Funktionensysteme

Selbstähnlicher Mengen

Weiterführende Überlegungen

Selbstaffine Mengen

Anwendung auf Bildkodierung

Affine Abbildung

Definition

Eine Abbildung $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heisst *affin*, falls sie sich als

$$S(x) = T(x) + b$$

schreiben lässt, wobei T eine lineare Transformation auf dem $\mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor ist.

Definition

Falls ein IFS aus affinen Kontraktionen $S_1, \ldots, S_m$ auf dem $\mathbb{R}^n$ besteht, wird der Attraktor dieses IFS *selbstaffine Menge* genannt.

Singulärwertfunktion

Definition

Seien $1 > \alpha_1 \geq ... \geq \alpha_n > 0$ die Singulärwerte von T. Für $0 \leq s \leq n$ ist die *Singulärwertfunktion* als

$$\varphi^s(T) := \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{r-1} \alpha_r^{s-r+1},$$

definiert, wobei $r \in \mathbb{N}$ so gewählt ist, dass $r - 1 \leq s \leq r$ gilt.

Beobachtung:

- $\varphi^s(T)$ ist submultiplikativ, d.h. $\varphi^s(TU) \leq \varphi^s(T)\varphi^s(U)$

Summe des k-ten Levels

Definition

Die *Summe des k-ten Levels* ist als

$$\Psi_k^s := \sum_{\mathcal{I}_k} \varphi^s(T_{i_1} \circ \ldots \circ T_{i_k})$$

definiert.

Beobachtung:

- Die Folge Ψ_k^s ist auch submultiplikativ.
- $(\Psi_k^s)^{1/k} \longrightarrow \Psi_\infty^s \ (k \to \infty)$
- $\varphi^s \searrow$ in s $\to \Psi_\infty^s \searrow$ in s

Vorausgesetzt $\Psi_\infty^n \leq 1$, dann existiert ein eindeutiges s, so dass $1 = \Psi_\infty^s = \lim_{k\to\infty}(\sum_{\mathcal{I}_k}(T_{i_1} \circ \ldots \circ T_{i_k}))^{1/s}$. Umgestellt also:

$$d(T_1, \ldots, T_m) := inf \left\{ s : \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mathcal{I}_k} \varphi^s(T_{i_1}, \ldots, T_{i_k}) < \infty \right\}$$

Theorem

Seien $T_1, \ldots, T_m$ lineare Kontraktionen und seien $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}^n$ Vektoren. Falls F die selbstaffine Menge ist, die

$$F = \bigcap_{i=1}^{m} (T_i(F) + y_i)$$

erfüllt, dann ist $dim_H F = dim_B F \leq d(T_1, \ldots, T_m)$. Falls $|T_i(x) - T_i(y)| \leq c|x-y|$ für alle i, wobei $0 < c < \frac{1}{2}$, dann gilt Gleichheit für fast alle $(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{nm}$ im Sinne des nm-dimensionalen Lebesgue-Mases.

Selbstähnliche und selbstaffine Mengen

Iterierte Funktionensysteme

Selbstähnlicher Mengen

Weiterführende Überlegungen

Selbstaffine Mengen

Anwendung auf Bildkodierung

Approximierbarkeit

Theorem

Sei $\{S_1,\ldots,S_m\}$ ein IFS und nehmen wir an, dass $|S_i(x)-S_i(x)| \le c|x-y|$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^n$ mit $c<1$ gilt. Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere, kompakte Menge. Dann gilt

$$d(E,F) \le d\left(E, \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E)\right)\frac{1}{(1-c)}, \tag{10}$$

wobei F der Attraktor des IFS ist und d die Hausdorffmetrik (siehe (3)).

Korollar

Sei E eine nicht-leere Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Für jedes $\delta>0$ existieren Kontraktionsähnlichkeiten $S_1,\ldots,S_m$ mit einem Attraktor, der $d(E,F)<\delta$ erfüllt.

Literatur

- Falconer, Kenneth: *Fractal Geometry - Mathematical Foundations and Applications* ISBN: 0-470-84861-8 (Cloth) ISBN: 978-0-470-84861-6 (Paper)
- http://de.wikipedia.org/wiki/Fixpunktsatz_von_Banach
- http://flam3.com/flame.pdf