Techniken zur Berechnung der Dimension

Seminarvortrag

Katharina Kiesel

Ulm, 21.11.2006

Übersicht

- Masse-Verteilungs-Prinzip
- Satz 3
- Potential-theoretische Methode

Berechnung der Dimension von Fraktalen

Es ist oft nicht einfach die Hausdorff - Dimension allein durch deren Definition zu berechnen.

Deshalb werden nun ein paar Methoden vorgestellt, welche zur Berechnung der Hausdorff - Dimension hilfreich sein können.

Satz 1

Angenommen F kann von n_k Mengen mit maximalen Durchmesser $\delta_k > 0$, wobei $\delta_k \to 0$ für $k \to \infty$, überdeckt werden. Dann gilt:

$$\dim_{\mathrm{H}}(F) \leq \underline{\dim}_{\mathrm{B}}(F) \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{\log(n_k)}{-\log(\delta_k)}.$$

Gilt zusätzlich $\delta_{k+1} \geq c\delta_k \ \forall k \in \mathbb{N}$ mit einem $c \in (0,1)$, so folgt:

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(F) \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{\log(n_k)}{-\log(\delta_k)}.$$

Gilt außerdem $\limsup_{k\to\infty} n_k \delta_k^s < \infty$, so ist $\mathcal{H}^s(F) < \infty$.
Beweis folgt an der Tafel.

Definition: Masse-Verteilung

Sei $F \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge und μ ein äußeres Borel-Maß auf $\mathbb{R}^n$. Ist $\mathrm{supp}(\mu) \subset F$ und gilt $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$, so wird μ als **Masse-Verteilung** auf F bezeichnet. O.B.d.A. können wir $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$ wählen indem wir μ durch $\mu(\mathbb{R}^n)^{-1}\mu$ ersetzen.

Satz 2: Masse-Verteilungs-Prinzip (MVP)

Sei μ eine Masse-Verteilung auf F. Wir nehmen an, dass es für ein $s > 0$ Konstanten $c = c(s) > 0$ und $\delta_0 = \delta_0(s) > 0$ gibt, so dass für alle Mengen U mit Durchmesser $|U| \leq \delta$ gilt:

$$\mu(U) \leq c \cdot |U|^s.$$

Dann folgt daraus, dass $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$ und

$$s \leq \dim_{\mathrm{H}}(F) \leq \underline{\dim}_{\mathrm{B}}(F) \leq \overline{\dim}_{\mathrm{B}}(F).$$

Beweis an der Tafel.

Beispiel 1: Cantor - Menge

Das MVP ermöglicht es schnell eine untere Grenze für die Hausdorff-Dimension zu finden.
Sei $\mu(F)$ die natürliche Massen-Verteilung auf F, so dass für jedes k die Intervalle I von E_k der Länge 3^{-k} die Masse $\mu(I) = 2^{-k}$ haben.

k	Anzahl Intervalle	Intervall-Länge	Masse
1	2	$1/3$	$1/2$
2	4	$1/9$	$1/4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	2^k	3^{-k}	2^{-k}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Beispiel 1: Cantor - Menge

Sei U eine Menge mit Durchmesser $|U| < 1/3$ und sei $k \in \mathbb{N}$ so dass

$$3^{-(k+1)} \leq |U| < 3^{-k}$$

- U kann höchstens eins der Intervalle von E_k schneiden.
- $\mu(U) \leq 2^{-k} \leq c|U|^{\frac{\log(2)}{\log(3)}}$.
- Aus dem MVP folgt: $\mathcal{H}^{\frac{\log(2)}{\log(3)}}(F) > 0 \Rightarrow \dim_{\mathrm{H}} F \geq \frac{\log(2)}{\log(3)}$

Beispiel 2

Sei $F_1 = F \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$: Produkt der Cantor-Menge mit dem Einheits-Intervall.
Dann soll $\dim_{\mathrm{H}} F_1 = 1 + \frac{\log(2)}{\log(3)} = s$ sein mit $0 < \mathcal{H}^s(F_1) < \infty$

Beispiel 2 - Fortsetzung

Additivität des Maßes:

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(F_L) + \mathcal{H}^s(F_R)$$

Für ein Intervall gilt:

$$3\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(3F_L)$$

Skalierungs-Eigenschaft:

$$\mathcal{H}^s(\lambda H) = \lambda^s \mathcal{H}^s(H)$$

$$\mathcal{H}^s(3F_L) = 3^s \mathcal{H}^s(F_L)$$

$$\mathcal{H}^s(F_L) = 3^{1-s} \mathcal{H}^s(F)$$

Beispiel 2 - Fortsetzung

Damit folgt:

$$\mathcal{H}^s(F) = 2 \cdot 3^{1-s}\mathcal{H}^s(F)$$

Ist $\mathcal{H}^s \in (0, \infty)$, dann folgt:

$$1 = 2 \cdot 3^{1-s}$$

$$1/2 = 3^{1-s}$$

$$e^{-\log(2)} = e^{(1-s)\log(3)}$$

$$s = \frac{\log(2)}{\log(3)} + 1$$

Aso ist $s = \frac{\log(2)}{\log(3)} + 1$ ist ein Kandidat für die Hausdorff-Dimension

Beispiel 2 - Fortsetzung

Berechnung:
Für jedes k wird F von 2^k Intervallen der Länge 3^{-k} überdeckt.
Ein Rechteck bestehend aus 3^k Quadraten mit Seitenlänge 3^{-k} (Durchmesser $3^{-k}\sqrt{2}$) überdeckt den Teil von F_1 über jedem Intervall.
Wenn man alle Rechtecke zusammen nimmt, dann wird F_1 von $2^k \cdot 3^k$ Quadraten mit Seitenlänge 3^{-k} überdeckt.

$$\mathcal{H}^s_{3^{-k}\sqrt{2}}(F_1) \leq 3^k 2^k (3^{-k}\sqrt{2})^s$$

$$= 3^{k-ks} \cdot 2^k \cdot 2^{\frac{s}{2}} = 2^{\frac{s}{2}}$$

$\Rightarrow \mathcal{H}^s(F_1) \leq 2^{\frac{s}{2}}$ und $\dim_{\mathrm{H}}(F_1) \leq s$.

Beispiel 2 - Fortsetzung

Berechnung:
Sei μ eine Masseverteilung.
U ist ein Rechteck mit Seiten parallel zu den Koordinatenachsen und Höhe h
$\Rightarrow \mu(U) = h \cdot 2^{-k}$.
Jede Menge U kann von einem Quadrat mit Länge $|U|$ überdeckt werden.
Wenn $3^{-(k+1)} \leq |U| < 3^{-k}$, dann überdeckt U höchstens ein Basis-Intervall von F mit Seitenlänge 3^{-k}.

$$\Rightarrow \mu(U) \leq |U| \cdot 2^{-k} \leq |U| \cdot 3^{-k\frac{\log(2)}{\log(3)}}$$

$$\leq |U| \cdot (3|U|)^{\frac{\log(2)}{\log(3)}} \leq 3^{\frac{\log(2)}{\log(3)}} \cdot |U|^s$$

Beispiel 2 - Fortsetzung

$\Rightarrow$ mit dem Masse-Verteilungs-Prinzip folgt:

$$\mathcal{H}^s(F_1) > 0$$

Satz 3

Sei F eine Borel-Menge des $\mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{H}^s(F) = \infty$, dann gibt es eine kompakte Teilmenge E von F, so dass
$0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$

Anwendungen des Satzes 3

- s-dimensionale Mengen $E \longrightarrow$ Rückschlüsse auf Menge F
- Eine Menge F mit der Hausdorff-Dimension $t > 0$ hat $\mathcal{H}^s(F) = \infty$, falls $0 < s < t$ und beinhaltet somit eine s-dimensionale Menge.

Proposition 1

μ soll eine Masse-Verteilung in $\mathbb{R}^n$ sein; F sei eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$; c sei eine Konstante, mit $0 < c < \infty$. Dann gilt:

- Wenn $limsup_{r \to 0} \frac{B_r(x)}{r^s} < 0$ für alle $x \in F$ dann ist $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$
- Wenn $limsup_{r \to 0} \frac{B_r(x)}{r^s} > 0$ für alle $x \in F$ dann ist $\mathcal{H}^s(F) \leq 2^s \frac{\mu(\mathbb{R}^n)}{c}$

Proposition 2

F sei eine Borel-Menge des $\mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{H}^s(F) = \infty$. Dann gibt es eine kompakte Menge $E \subset F$, so dass $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$; für eine Konstante b gilt:

$$\mathcal{H}^s(E \cap B_r(x)) \leq br^s$$

Potential-theoretische Methode

- Hilfsmittel um die Hausdorff-Dimension zu berechnen
- Seither: Abschätzen der Masse von großen Anzahlen an kleinen Mengen
- Jetzt: Untersuchen eines bestimmten Integrals auf Konvergenz

Potential-theoretische-Methode

Definition: Für $s \geq 0$ ist das s-**Potential** an einem Punkt x im $\mathbb{R}^n$ aufgrund der Masse-Verteilung μ im $\mathbb{R}^n$ definiert als

$$\varphi_s(x) = \int \frac{1}{|x-y|^s} d\mu(y) = (\frac{1}{|y|^s} * \mu)(x)$$

Potential-theoretische-Methode

Definition: Die s-**Energie** von der Masse-Verteilung μ ist

$$I_s(\mu) = \int \varphi_s(x) d\mu(x) = \int\int \frac{1}{|x-y|^s} d\mu(x) d\mu(y)$$

Potential-theoretische-Methode

Satz 4

Sei F ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$

1. Falls es eine Masse-Verteilung μ auf F mit $I^s(\mu) < \infty$ gibt, dann ist $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ und $\dim_{\mathrm{H}}(F) \geq s$.
2. Falls F eine Borel-Menge mit $\mathcal{H}^s(F) > 0$ ist, dann existiert eine Masse-Verteilung μ auf F mit $I^t(\mu) < \infty$ für alle $t < s$.

Beweis: Tafel

Potential-theoretische-Methode

- Satz 4 stellt eine Verbindung zwischen der Hausdorff-Dimension und der Potential-Theorie her.
- Wenn es eine Masse-Verteilung μ auf der Menge F gibt, die eine endliche s-Energie hat, dann hat F wenigstens die Dimension s.

Potential-theoretische-Methode

Anwendungen:

- Anwendungen folgen vor allem noch in späteren Vorträgen (z.B. beim Beweis des Projektions-Theorems)
- Anwendung des Satzes 4 bei Fraktalen F_ϕ, die von einem Parameter abhängen.
  Es gibt einen natürlichen Weg eine Masseverteilung μ_ϕ auf F_ϕ fr alle ϕ zu definieren, wenn wir zeigen können, dass für ein s Folgendes gilt:
  $\int I_s(\mu_\phi) d\phi = \int\int\int \frac{1}{|x-y|^s} d\mu_\phi(x) d\mu_\phi(y) d\phi < \infty$, dann ist $I_s(\mu_\phi) < \infty$ und $\dim_{\mathrm{H}}(F_\phi) \geq s$ für fast alle ϕ.

Danke für die Aufmerksamkeit !