Projektionen und Produkte von Fraktalen

Hauptseminarvortrag

Christine Kochner

5. Dezember 2006

6. Projektion von Fraktalen

6. Projektionen von Fraktalen

Übersicht:

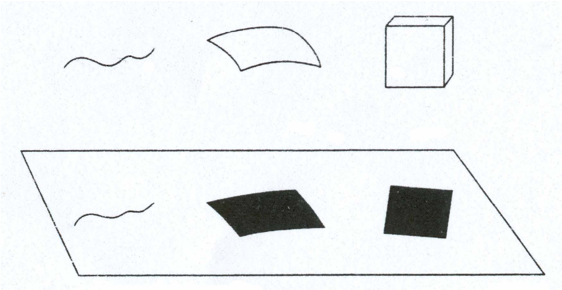
- orthogonale Projektionen (Schatten) im $\mathbb{R}^2$ (Erweiterung auf $\mathbb{R}^n$)
- Änderung der Dimension beim Projezieren
- Änderung der Länge beim Projezieren

6.1 Einführende Beispiele

6. Projektionen von Fraktalen

6.1 Einführende Beispiele

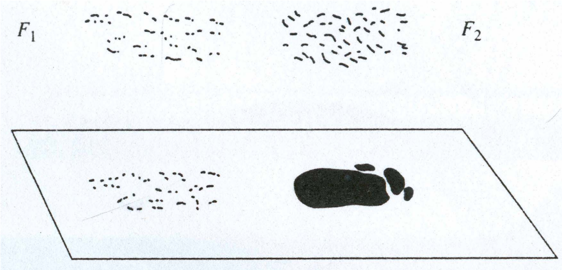
Projektion klassischer Mengen auf eine Fläche:



6. Projektionen von Fraktalen

6.1 Einführende Beispiele

Projektion fraktaler Mengen auf eine Fläche:



6.2 Das Projektionstheorem

6. Projektionen von Fraktalen

6.2 Das Projektionstheorem

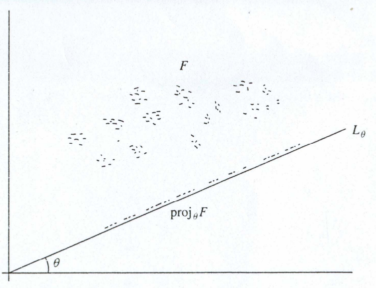


Figure 6.2 Projection of a set F onto a line L_θ

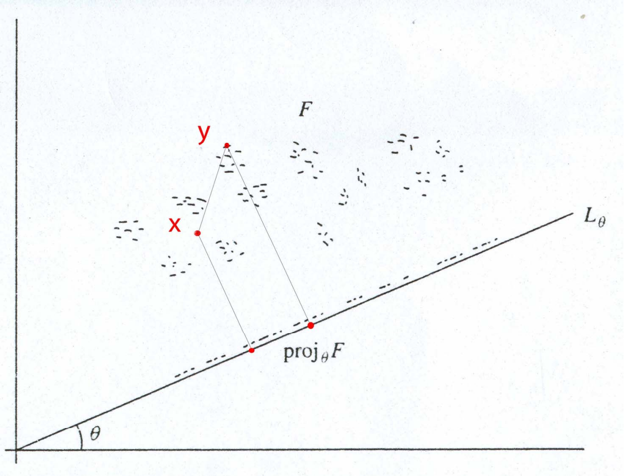
L_θ: Ursprungsgerade mit $\angle\theta$ zur x-Achse

F: Teilmenge des $\mathbb{R}^2$

proj_θ: orthogonale Projektion auf L_θ

6. Projektionen von Fraktalen

6.2 Das Projektionstheorem



6. Projektionen von Fraktalen

6.2 Das Projektionstheorem

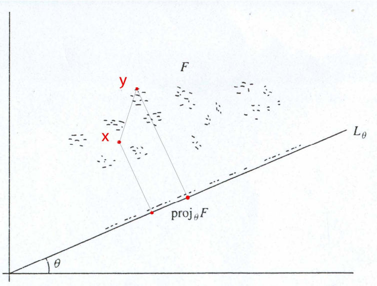


Figure 6.2 Projection of a set F onto a line L_θ

Es gilt also (für $x, y \in \mathbb{R}^2$):

$$|\mathrm{proj}_\theta x - \mathrm{proj}_\theta y| \leq |x - y|$$

6. Projektionen von Fraktalen

6.2 Das Projektionstheorem

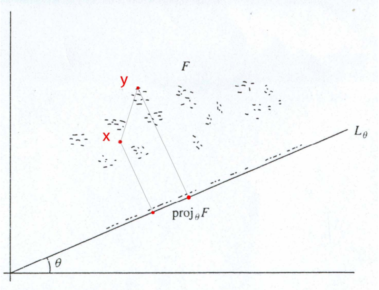


Figure 6.2 Projection of a set F onto a line L_θ

Es gilt also (für $x, y \in \mathbb{R}^2$):

$$|\text{proj}_\theta x - \text{proj}_\theta y| \leq |x - y|$$

Eine Funktion f: X→Y heißt Lipschitz-Abbildung, wenn es ein c $\geq$ 0 gibt, so dass gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|$$

für alle x,y∈X

6. Projektionen von Fraktalen

6.2 Das Projektionstheorem

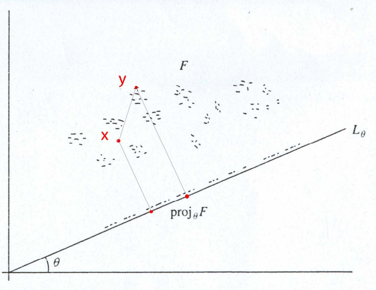


Figure 6.2 Projection of a set F onto a line L_θ

Es gilt also (für x,y$\in \mathbb{R}^2$):

$$|\mathrm{proj}_\theta x - \mathrm{proj}_\theta y| \leq |x - y|$$

$\Rightarrow$ proj_θ ist eine Lipschitz Abbildung mit c=1

6. Projektionen von Fraktalen

6.2 Das Projektionstheorem

Aus Korollar 2.4(a) ist bekannt:

Corollary (2.4)

(a) Wenn $\mathrm{f} : F \to \mathbb{R}^m$ *eine Lipschitz Abbildung ist, dann gilt:*

$$\dim_H(\mathrm{f}(F)) \leq \dim_H(F)$$

Da proj_θ lipschitz $\Rightarrow \dim_H(\mathrm{proj}_\theta(F)) \leq \dim_H(F)$

6. Projektionen von Fraktalen

6.2 Das Projektionstheorem

Aus Korollar 2.4(a) ist bekannt:

Corollary (2.4)

(a) Wenn $f : F \to \mathbb{R}^m$ *eine Lipschitz Abbildung ist, dann gilt:*

$$\dim_H(f(F)) \leq \dim_H(F)$$

Da proj_θ lipschitz $\Rightarrow \dim_H(\text{proj}_\theta(F)) \leq \dim_H(F)$

Außerdem gilt: $\dim_H(\text{proj}_\theta(F)) \leq 1$ (da $\text{proj}_\theta(F) \subset L_\theta$)

6. Projektionen von Fraktalen

6.2 Das Projektionstheorem

Aus Korollar 2.4(a) ist bekannt:

Corollary (2.4)

(a) Wenn $\mathrm{f} : \mathrm{F} \to \mathbb{R}^m$ *eine Lipschitz Abbildung ist, dann gilt:*

$$\dim_H(\mathrm{f}(F)) \leq \dim_H(F)$$

Da proj_θ lipschitz $\Rightarrow \dim_H(\mathrm{proj}_\theta(F)) \leq \dim_H(F)$

Außerdem gilt: $\dim_H(\mathrm{proj}_\theta(F)) \leq 1$ (da $\mathrm{proj}_\theta(F) \subset L_\theta$)

$\Rightarrow \dim_H(\mathrm{proj}_\theta(F)) \leq \min\{\dim_H(F), 1\}$

6. Projektionen von Fraktalen

6.2 Das Projektionstheorem

Theorem (Projektionstheorem 6.1)

Sei $F \subset \mathbb{R}^2$ eine Borelmenge

(a) Wenn $\dim_H(F) \leq 1$*, dann gilt:* $\dim_H(\text{proj}_\theta(F)) = \dim_H(F)$
für fast alle $\theta \in [0, \pi)$

(b) Wenn $\dim_H(F) > 1$*, dann hat* $\text{proj}_\theta(F)$
(als Teilmenge von L_θ) positive Länge
und hat somit die Dimension 1 für fast alle $\theta \in [0, \pi)$

6. Projektionen von Fraktalen

6.2 Das Projektionstheorem

Für den folgenden Beweis benutzen wir Theorem 4.13

zur Erinnerung:
Die s-Energie ist definiert als: $I_s(\mu) = \int\int \frac{d\mu(x) \cdot d\mu(y)}{|x-y|^s}$

Theorem (4.13)

Sei F eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$
(a) Wenn es eine Massenverteilung μ *auf F mit* $I_s(\mu) < \infty$ *gibt, dann ist* $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ *und* $\dim_H F \geq s$
(b) Wenn F eine Borelmenge mit $\mathcal{H}^s(F) > 0$ *ist, dann existiert eine Massenverteilung* μ *auf F mit* $I_t(\mu) < \infty$ *für alle t<s*

6. Projektionen von Fraktalen

6.2 Das Projektionstheorem

Beweis (zu Theorem 6.1):

Für $s < \dim_H F \leq 1$ existiert nach Theorem 4.13(b) eine Massenverteilung μ auf F mit $0 < \mu(F) < \infty$ und

$$\int_F \int_F \frac{d\mu(x) \cdot d\mu(y)}{|x - y|^s} < \infty$$

6. Projektionen von Fraktalen

6.2 Das Projektionstheorem

Beweis (Fortsetzung):

Um eine Massenverteilung μ_θ auf $\mathrm{proj}_\theta F$ zu bekommen, projeziert man für jedes θ die Massenverteilung μ auf die Gerade L_θ. Daher definiert man μ_θ :

$$\mu_\theta([a,b]) := \mu\left\{x : a \leq x \cdot \vec{\theta} \leq b\right\}$$

für jedes Intervall $[a,b]$, oder äquivalent:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(t) d\mu_\theta(t) := \int_F \mathrm{f}(x \cdot \vec{\theta}) d\mu(x)$$

für jede nicht-negative Funktion f
($\vec{\theta}$: Einheitsvektor in Richtung θ)

6. Projektionen von Fraktalen

6.2 Das Projektionstheorem

Beweis (Fortsetzung):

Dann ist:

$$\int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{d\mu_\theta(u)\cdot d\mu_\theta(v)}{|u-v|^s}\right] d\theta$$

$$= \int_0^\pi \left[\int_F \int_{-\infty}^\infty \frac{d\mu(x)\cdot d\mu_\theta(v)}{\left|x\cdot\vec{\theta}-v\right|^s}\right] d\theta$$

wegen

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)d\mu_\theta(t) := \int_F f(x\cdot\vec{\theta})d\mu(x)$$

6. Projektionen von Fraktalen

6.2 Das Projektionstheorem

Beweis (Fortsetzung):

Dann ist:

$$\int_0^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu_\theta(u) \cdot d\mu_\theta(v)}{|u - v|^s} \right] d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\int_F \int_F \frac{d\mu(x) \cdot d\mu(y)}{\left| x \cdot \vec{\theta} - y \cdot \vec{\theta} \right|^s} \right] d\theta$$

nach zweimaliger Anwendung von:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) d\mu_\theta(t) := \int_F f(x \cdot \vec{\theta}) d\mu(x)$$

6. Projektionen von Fraktalen

6.2 Das Projektionstheorem

Beweis (Fortsetzung):

Dann ist:

$$\int_0^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu_\theta(u) \cdot d\mu_\theta(v)}{|u-v|^s} \right] d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\int_F \int_F \frac{d\mu(x) \cdot d\mu(y)}{\left| x \cdot \vec{\theta} - y \cdot \vec{\theta} \right|^s} \right] d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\int_F \int_F \frac{d\mu(x) \cdot d\mu(y)}{\left| (x-y) \cdot \vec{\theta} \right|^s} \right] d\theta$$

6. Projektionen von Fraktalen

6.2 Das Projektionstheorem

Beweis (Fortsetzung):

$$\int_0^\pi \left[\int_F \int_F \frac{d\mu(x) \cdot d\mu(y)}{\left|(x-y) \cdot \vec{\theta}\right|^s} \right] d\theta$$

$$= \int_0^\pi \frac{d\theta}{\left|\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}\right|^s} \int_F \int_F \frac{d\mu(x) \cdot d\mu(y)}{|x-y|^s}$$

für beliebige feste Einheitsvektoren $\vec{\tau}$

6. Projektionen von Fraktalen

6.2 Das Projektionstheorem

Beweis (Fortsetzung):

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\left|\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}\right|^s} \int_F \int_F \frac{d\mu(x)\cdot d\mu(y)}{|x-y|^s}$$

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\left|\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}\right|^s} = \int_0^\pi \frac{d\theta}{\left||\vec{\tau}|\cdot\left|\vec{\theta}\right|\cdot\cos(\tau-\theta)\right|^s} = \int_0^\pi \frac{d\theta}{|\cos(\tau-\theta)|^s} < \infty$$

und

$$\int_F \int_F \frac{d\mu(x)\cdot d\mu(y)}{|x-y|^s} < \infty$$

nach Theorem 4.13(b)

6. Projektionen von Fraktalen

6.2 Das Projektionstheorem

Beweis (Fortsetzung):

Somit ist

$$\int_F \int_F \frac{d\mu_\theta(u) \cdot d\mu_\theta(v)}{|u-v|^s} < \infty$$

$\Rightarrow \dim_H(\mathrm{proj}_\theta F) \geq s$, für alle $s < \dim_H(F)$
(nach Theorem 4.13(a))

Außerdem ist bekannt:
$\dim_H(\mathrm{proj}_\theta(F)) \leq \dim_H(F)$ (da proj_θ lipschitz)

Somit: $\dim_H(\mathrm{proj}_\theta(F)) = \dim_H(F)$ für $\dim_H(F) \leq 1$

6. Projektionen von Fraktalen

6.2 Das Projektionstheorem

Theorem (Höherdimensionales Projektionstheorem)

Sei $F \subset \mathbb{R}^n$ eine Borelmenge.

(a) Wenn $\dim_H F \leq k$, dann gilt $\dim_H(proj_\Pi F) = \dim_H F$ für fast alle $\Pi \in G_{n,k}$

(b) Wenn $\dim_H F > k$, dann hat $proj_\Pi F$ ein positives k-dimensionales Maß und somit die Dimension k für fast alle $\Pi \in G_{n,k}$

6.3 Projektionen von s-Mengen mit ganzzahliger Dimension

6. Projektionen von Fraktalen

6.3 Projektionen von s-Mengen mit ganzzahliger Dimension

Sei $F \subset \mathbb{R}^2$ eine 1-Menge und somit $\dim_H F = 1$

aus Theorem 6.1:
Projektionen von F auf fast alle L_θ besitzen Dimension 1, jedoch keine Aussage über die Länge

Für den speziellen Fall, dass F eine 1-Menge ist, ist eine genauere Analyse möglich...

6. Projektionen von Fraktalen

6.3 Projektionen von s-Mengen mit ganzzahliger Dimension

Theorem (6.3)

Sei F eine reguläre 1-Menge im $\mathbb{R}^2$.
Dann besitzt eine Projektion $\mathrm{proj}_\theta F$ *positive Länge, außer für maximal ein* $\theta \in [0, \pi)$.

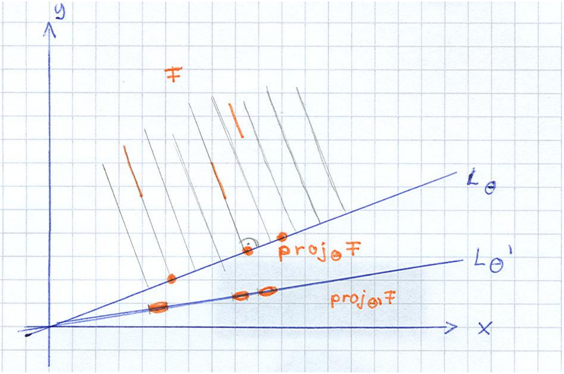
Theorem (6.4)

Sei F eine irreguläre 1-Menge im $\mathbb{R}^2$.
Dann besitzt die Projektion $\mathrm{proj}_\theta F$ *für fast alle* $\theta \in [0, \pi)$ *eine Länge von Null.*

6. Projektionen von Fraktalen

6.3 Projektionen von s-Mengen mit ganzzahliger Dimension

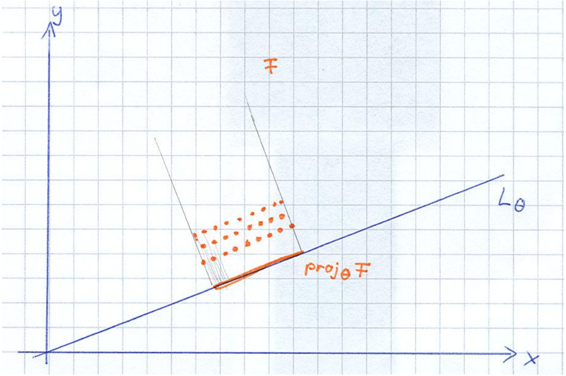
zu Theorem 6.3:



6. Projektionen von Fraktalen

6.3 Projektionen von s-Mengen mit ganzzahliger Dimension

zu Theorem 6.4:



6. Projektionen von Fraktalen

6.3 Projektionen von s-Mengen mit ganzzahliger Dimension

Höherdimensionale Verallgemeinerung:

Theorem (6.8)

Sei F eine k-Menge im $\mathbb{R}^n$, wobei k ein ganzzahliger Wert ist.

(a) Wenn F regulär ist, dann hat $\mathrm{proj}_\Pi F$ ein positives k-dimensionales Maß für fast alle $\Pi \in G_{n,k}$.

(b) Wenn F irregulär ist, dann besitzt $\mathrm{proj}_\Pi F$ ein k-dimensionales Maß von Null für fast alle $\Pi \in G_{n,k}$.

6.4 Projektionen beliebiger Mengen ganzzahliger Dimension

6. Projektionen von Fraktalen

6.4 Projektionen von beliebigen Mengen ganzzahliger Dimension

In den bisherigen Theoremen konnte keine vollständige Antwort auf die Frage, ob Projektionen in der Ebene, positive Länge oder eine Länge von Null besitzen, gegeben werden.

Eine Teilmenge F des $\mathbb{R}^2$ mit Hausdorffdimension 1 muss nicht unbedingt eine 1-Menge sein.

Für solche Mengen ist jedoch eine mathematische Analyse schwierig, daher zeigen wir, dass es zu jeder dieser Mengen, eine Borel-Menge gibt, für die stellvertretend die Länge bestimmt werden kann.

6. Projektionen von Fraktalen

6.4 Projektionen von beliebigen Mengen ganzzahliger Dimension

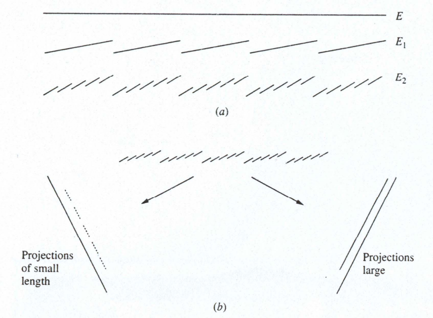
Theorem (6.9)

Sei G_θ eine Teilmenge von L_θ für alle $\theta \in [0, \pi)$.
Dann existiert eine Borelmenge $F \subset \mathbb{R}^2$, so dass:
(a) $proj_\theta F \supset G_\theta \forall \theta$, und
(b) Länge($proj_\theta F \setminus G_\theta$)=0

6. Projektionen von Fraktalen

6.4 Projektionen von beliebigen Mengen ganzzahliger Dimension

Beweisidee:



E_1: k Liniensegmente der Länge $\approx \lambda/k$ um ϵ zu E gedreht

E_2: k^2 Liniensegmente der Länge $\approx \lambda/k^2$ um $2 \cdot \epsilon$ zu E gedreht

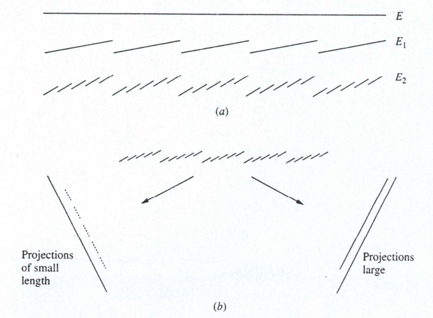
$\vdots$

E_r: k^r Liniensegmente der Länge $\approx \lambda/k^r$ um $r \cdot \epsilon$ zu E gedreht, bis $r \cdot \epsilon \approx \frac{1}{4}\pi$

6. Projektionen von Fraktalen

6.4 Projektionen von beliebigen Mengen ganzzahliger Dimension

Beweisidee(Fortsetzung):



$\text{proj}_\theta E$ und $proj_\theta E_r$ sind nahezu identisch für $0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$

$\text{proj}_\theta E_r$ besitzt sehr kleine Länge für $-\frac{1}{4}\pi < \theta < 0$

6. Projektionen von Fraktalen

6.4 Projektionen von beliebigen Mengen ganzzahliger Dimension

Beweisidee(Fortsetzung):

Die Projektionen von E_r sind also in bestimmten Richtungen sehr ähnlich zu denen von E, während sie in anderen Richtungen fast verschwinden.

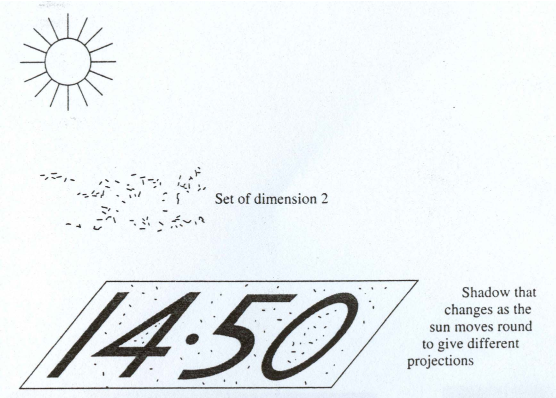
Diese Idee kann benutzt werden um Mengen zu erhalten, deren Projektionen in einem bestimmten schmalen Projektionswinkel fast das gesamte G_θ abdecken, die aber für andere Winkel gegen Null gehen.

Durch Vereinigung solcher Mengen erhält man eine Menge mit den geforderten Eigenschaften.

6. Projektionen von Fraktalen

6.4 Projektionen von beliebigen Mengen ganzzahliger Dimension

Anwendungsbeispiel: Digitale Sonnenuhr



6. Projektionen von Fraktalen

6.4 Projektionen von beliebigen Mengen ganzzahliger Dimension

Anwendungsbeispiel: Digitale Sonnenuhr

- wurde tatsächlich 1994 gebaut
- Erfinder: Werner Krotz-Vogel, Hans und Daniel Scharstein
- zu bewundern im Sonnenuhrenpark in Glenk (Belgien)
- im Deutschen Museum (München) in der Ausstellung der Sonnenuhren
- auf dem Dach des Kölnischen Stadtmuseums (Köln)

6. Projektionen von Fraktalen

6.4 Projektionen von beliebigen Mengen ganzzahliger Dimension

Große digitale Sonnenuhr im Sonnenuhrenpark (Belgien)

6. Projektionen von Fraktalen

6.4 Projektionen von beliebigen Mengen ganzzahliger Dimension

7. Produkte von Fraktalen

7.1 Einführung

7. Produkte von Fraktalen

7.1 Einführung

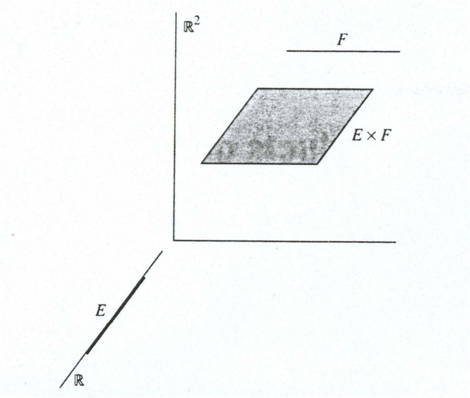
E$\subset \mathbb{R}^n$, F$\subset \mathbb{R}^m$

Dann ist bekanntlich das (Kartesische) Produkt definiert als:

$$E \times F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : x \in E, y \in F\}$$

7. Produkte von Fraktalen

7.1 Einführung



7.2 Produktformeln

7. Produkte von Fraktalen

7.2 Produktformeln

Unter Verwendung der klassischen Definition von Mengen gilt:
$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$

Bei fraktalen Dimensionen gilt diese Gleichung in vielen Fällen auch, jedoch leider nicht immer.

Für die Hausdorffdimension z.B gilt für den allgemeinen Fall nur die Ungleichung:
$\dim_H(E \times F) \geq \dim_H E + \dim_H F$

7. Produkte von Fraktalen

7.2 Produktformeln

Satz 7.1:

Seien E $\subset \mathbb{R}^n$, F $\subset \mathbb{R}^m$ Borelmengen mit $\mathcal{H}^s(E), \mathcal{H}^t(F) < \infty$, dann gilt:

$$\mathcal{H}^{s+t}(E \times F) \geq c \cdot \mathcal{H}^s(E)\mathcal{H}^t(F)$$

wobei $c > 0$ nur von s und t abhängt.

7. Produkte von Fraktalen

7.2 Produktformeln

Beweis:

Sei E,F $\subset \mathbb{R}$ (allgemeiner Beweis nahezu identisch)

$\mathcal{H}^s(E)$ oder $\mathcal{H}^t(F)$ ist Null, Gleichung trivial.

Für 0$< \mathcal{H}^s(E), \mathcal{H}^t(F) < \infty$ definieren wir eine Massenverteilung μ über das Rechteck $I \times J$ (I,J $\subset \mathbb{R}$) :
$\mu(I \times J) = \mathcal{H}^s(E \cap I)\mathcal{H}^t(F \cap J)$
Es kann gezeigt werden, dass hierdurch eine Massenverteilung μ auf $E \times F$ mit $\mu(\mathbb{R}^2) = \mathcal{H}^s(E)\mathcal{H}^t(F)$ definiert wird.

7. Produkte von Fraktalen

7.2 Produktformeln

Beweis (Fortsetzung):

zur Erinnerung:

Satz 5.1
Sei F eine s-Menge in $\mathbb{R}$, dann gilt:
(b) $2^{-s} \leq \overline{D}^s(F, x) \leq 1$ für $\mathcal{H}^s$-fast alle x $\in$ F.

Mit Hilfe der Dichteschätzung aus 5.1(b) ergibt sich:

- $\overline{\lim}_{r \to 0} \mathcal{H}^s(E \cap B(x, r)) \cdot (2r)^{-s} \leq 1$ für $\mathcal{H}^s$ -fast alle x $\in$ E (*)
- $\overline{\lim}_{r \to 0} \mathcal{H}^t(F \cap B(y, r)) \cdot (2r)^{-t} \leq 1$ für $\mathcal{H}^t$ -fast alle y $\in$ F (**)

7. Produkte von Fraktalen

7.2 Produktformeln

Beweis (Fortsetzung):

Da die Scheibe B((x,y),r) in dem Quadrat B(x,r)$\times$B(y,r) enthalten ist gilt:

$$\mu(B((x,y),r)) \leq \mu(B(x,r) \times B(y,r)) \\ = \mathcal{H}^s(E \cap B(x,r))\mathcal{H}^t(F \cap B(y,r))$$

also:

$$\frac{\mu(B((x,y),r))}{(2r)^{s+t}} \leq \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B(x,r))}{(2r)^s} \cdot \frac{\mathcal{H}^t(F \cap B(y,r))}{(2r)^t}$$

7. Produkte von Fraktalen

7.2 Produktformeln

Unter Verwendung von (*) und (**) folgt:

$$\overline{lim}_{r\to 0}\mu(B((x,y),r))(2r)^{-(s+t)} \leq 1$$

für μ-fast alle (x,y)$\in E \times F$

Nach Satz 4.9(a) gilt dann:
$\mathcal{H}^{s+t}(E \times F) \geq 2^{-(s+t)}\mu(E \times F) = 2^{-(s+t)}\mathcal{H}^s(E) \cdot \mathcal{H}^t(F)$

□

Erinnerung: Satz 4.9(a):
μ Massenverteilung auf $\mathbb{R}^n$, F$\subset \mathbb{R}^n$ Borelmenge und $0 < c < \infty$
(a) Wenn $\overline{lim}_{r\to 0}\mu(B(x,r))$/r$^s < c$ für alle x$\in$F, dann gilt:

$$\mathcal{H}^s(F) \geq \mu(F)/c$$

7. Produkte von Fraktalen

7.2 Produktformeln

Produktformel 7.2

Seien E$\subset \mathbb{R}^n$, F$\subset \mathbb{R}^m$ Borelmengen, dann gilt:

$$\dim_H(E \times F) \geq \dim_H(E) + \dim_H(F)$$

7. Produkte von Fraktalen

7.2 Produktformeln

Beweis:

Seien s,t beliebige Zahlen mit $s < \dim_H(E)$ und $t < \dim_H(F)$, also $\mathcal{H}^s(E), \mathcal{H}^t(F) = \infty$

Theorem 4.10 besagt, dass es Borelmengen $\mathrm{E}_0 \subset E$ und $\mathrm{F}_0 \subset F$ mit $0 < \mathcal{H}^s(E_0)$,$\mathcal{H}^t(F_0) < \infty$ gibt.

Nach Satz 7.1 gilt:

$$\mathcal{H}^{s+t}(E \times F) \geq \mathcal{H}^{s+t}(E_0 \times F_0) \geq c \cdot \mathcal{H}^s(E_0)\mathcal{H}^t(F_0) > 0$$

Somit ist $\dim_H(E \times F) \geq s + t$

Wählt man s und t beliebig nahe an $\dim_H(E)$ und $\dim_H(F)$ so folgt Produktformel 7.2

7. Produkte von Fraktalen

7.2 Produktformeln

Produktformel 7.3

Für jede Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ und $F \subset \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\dim_H(E \times F) \leq \dim_H(E) + \overline{\dim}_B(F)$$

7. Produkte von Fraktalen

7.2 Produktformeln

Corollary (7.4)

Wenn $\dim_H(F) = \overline{\dim}_B(F)$ *dann gilt:*

$$\dim_H(E \times F) = \dim_H(E) + \dim_H(F)$$

Beweis:

Aus Produktformel 7.2 und 7.3 folgt:

$$\dim_H(E) + \dim_H(F) \leq \dim_H(E \times F) \leq \dim_H(E) + \overline{\dim}_B(F)$$
$$= \dim_H(E) + \dim_H(F)$$

□

7.3 Beispiele

7. Produkte von Fraktalen

7.3 Beispiele

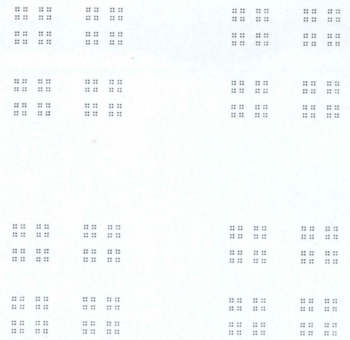


Figure 7.2 The product $F \times F$, where F is the middle third Cantor set. In this case, $\dim_{\mathrm{H}} F \times F = 2 \dim_{\mathrm{H}} F = 2 \log 2 / \log 3$

7. Produkte von Fraktalen

7.3 Beispiele

Beispiele:

- „Kantorprodukt“ $F \times F$ (F Kantorsche Drittelmenge)
  $\dim_H(F \times F) = \dim_H(F) + \dim_H(F) = 2 \cdot \frac{\log 2}{\log 3}$
  (Da Oberboxdimension und Hausdorffdimension übereinstimmen)
- „Kantorziel“ $F' = \{(r, \theta) : r \in F, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, F Kantorsche Drittelmenge, $\dim_H(F \times [0, 2\pi]) = \frac{\log 2}{\log 3} + 1$

7. Produkte von Fraktalen

7.3 Beispiele

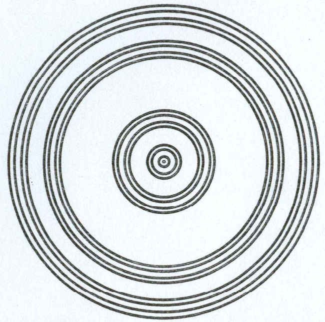


Figure 7.3 The 'Cantor target'—the set swept out by rotating the middle third Cantor set about an endpoint

7.4 Produktformeln (Fortsetzung)

7. Produkte von Fraktalen

7.4 Produktformeln(Fortsetzung)

Satz 7.9:

Sei F eine borelsche Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.
Wenn $1 \leq s \leq 2$ dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{s-1}(F \cap L_x)dx \leq \mathcal{H}^s(F)$$

wobei mit L_x die Linie parallel zur y-Achse durch den Punkt (x,0) bezeichnet wird.

7. Produkte von Fraktalen

7.4 Produktformeln(Fortsetzung)

Beweis:
Sei $\epsilon > 0$ und $\{U_i\}$ eine δ-Überdeckung, so dass gilt:

$$\sum_i |U_i|^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(F) + \epsilon$$

U_i ist im Quadrat S_i der Seitenlänge $|U_i|$ enthalten, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind. Sei χ_i Indikatorfunktion von S_i

7. Produkte von Fraktalen

7.4 Produktformeln(Fortsetzung)

Beweis (Fotsetzung):

Für jedes x bilden die Mengen $\{S_i \cap L_x\}$ eine δ-Überdeckung von $F \cap L_x$, also gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^{s-1}(F \cap L_x) &\leq \sum_i |S_i \cap L_x|^{s-1} \\ &= \sum_i |U_i|^{s-2} |S_i \cap L_x| \\ &= \sum_i |U_i|^{s-2} \int \chi_i(x,y) dy \end{aligned}$$

7. Produkte von Fraktalen

7.4 Produktformeln(Fortsetzung)

Beweis (Fotsetzung):

Somit:

$$\begin{aligned}\int \mathcal{H}_\delta^{s-1}(F \cap L_x)dx &\leq |U_i|^{s-2} \int \int \chi_i(x,y)dxdy \\ &= |U_i|^s \\ &\leq \mathcal{H}_\delta^s(F) + \epsilon\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig, gilt: $\int \mathcal{H}_\delta^{s-1}(F \cap L_x)dx \leq \mathcal{H}_\delta^s(F)$
Lässt man δ gegen Null gehen folgt die Ungleichung aus diesem Satz.

$\square$

7. Produkte von Fraktalen

7.4 Produktformeln(Fortsetzung)

Corollary (7.10)

Sei F eine borelsche Teilmenge des $\mathbb{R}^2$
Dann gilt für fast alle x:

$$\dim_H(F \cap L_x) \leq \max\{0, \dim_H(F) - 1\}$$

Beweis:

Sei $s > \dim_H(F)$, so dass: $\mathcal{H}^s(F) = 0$
Wenn s>1 ist ergibt Satz 7.9: $\mathcal{H}^{s-1}(F \cap L_x) = 0$ und damit ist $\dim_H(F \cap L_x) \leq s - 1$, für fast alle x.

$\square$

7. Produkte von Fraktalen

7.4 Produktformeln(Fortsetzung)

Satz 7.11

Sei F eine beliebige Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und sei E eine Teilmenge der x-Achse. Angenommen, dass es eine Konstante c gibt, so dass $\mathcal{H}^t(F \cap L_x) \geq c$ für alle x $\in E$
Dann gilt:

$$\mathcal{H}^{s+t}(F) \geq b \cdot c \cdot \mathcal{H}^s(E)$$

wobei b>0 nur von s und t abhängt.

7. Produkte von Fraktalen

7.4 Produktformeln(Fortsetzung)

Corollary (7.12)

Sei F eine beliebige Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ *und sei E eine Teilmenge der x-Achse. Wenn* $\dim_H(F \cap L_x) \geq t$ *für alle* $x \in E$*, dann gilt:*

$$\dim_H F \geq t + \dim_H E$$

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!