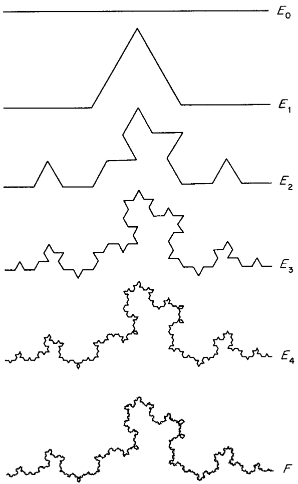
Zufällige Fraktale

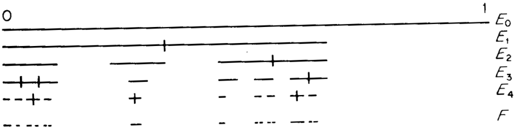
Klaus Scheufele

16. Januar 2007

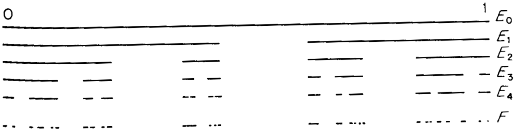
Zufällige Koch Kurve



Zufällige Cantor Menge



(a)



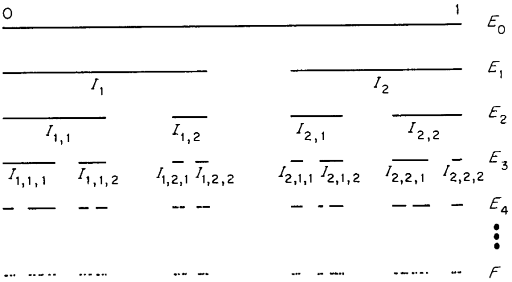
(b)

Zufällige Fraktale sind statistische selbstähnlich.

Statistische Selbstähnlichkeit

Ein Fraktal ist statistisch selbstähnlich, wenn Vergrößerungen von Teilen der Menge die gleiche Zufallsverteilung haben.

Analyse einer zufälligen Cantor Menge



Beschreibung der zufälligen Cantor Menge:

- $C_{i_1,\ldots,i_k} = |I_{i_1,\ldots,i_k}|/|I_{i_1,\ldots,i_{k-1}}|$
- $a \leq C_{i_1,\ldots,i_k} \leq b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a \leq b < \frac{1}{2}$
- für jede Folge $i_1, \ldots, i_k$ haben $C_{i_1,\ldots,i_k,1}$ und $C_1 = |I_1|$ sowie $C_{i_1,\ldots,i_k,2}$ und $C_2 = |I_2|$ dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung
- Grundmenge Ω die Klasse von fallenden Folgen der Menge $[0,1] = E_0 \supset E_1 \supset \ldots$
- Fraktal $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$

Theorem 1

Mit der Wahrscheinlichkeit 1 hat die oben beschriebene Cantor Menge die Hausdorff Dimension $dim_H F = s$, wobei s die Lösung der Gleichung

$$\mathbb{E}(C_1^s + C_2^s) = 1 \tag{1}$$

- Abschätzung nach unten über die s Energie

Theorem 4.13 a

Sei F eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Wenn es eine Masseverteilung μ auf F gibt mit s-Energie $I_s(\mu) < \infty$, dann ist $H^s(F) = \infty$ und $dim_H F \geq s$.

$$I_s(\mu) = \int \int \frac{d\mu(x) d\mu(y)}{|x-y|^s} \tag{2}$$

- Abschätzung nach unten über die s Energie
  - $I \in E_k$
  - $\mu(I) = \lim_{j \to \infty} \{\sum |J|^s : J \in E_j \wedge J \subset I\}$
  - $\mathbb{E}(\mu(I)|F_k) = |I|^s$

Theorem 4.13 a

Sei F eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Wenn es eine Masseverteilung μ auf F gibt mit s-Energie $I_s(\mu) < \infty$, dann ist $H^s(F) = \infty$ und $dim_H F \geq s$.

$$I_s(\mu) = \int \int \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^s} \tag{2}$$

- für ein festes t mit $0 < t \leq s$ gilt:

$$\int \int_{x \wedge y = I} |x-y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y)$$

$$= 2 \int_{x \in I_L} \int_{y \in I_R} |x-y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y)$$

$$\leq 2 d^{-t} |I|^{-t} \mu(I_L) \mu(I_R)$$

- für ein festes t mit $0 < t \leq s$ gilt:

$$\int \int_{x \wedge y = I} |x-y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y)$$
$$= 2 \int_{x \in I_L} \int_{y \in I_R} |x-y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y)$$
$$\leq 2 d^{-t} |I|^{-t} \mu(I_L) \mu(I_R)$$

- Wenn $I \in E_k$,

$$\mathbb{E}(\int \int_{x \wedge y = I} |x-y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y)) | F_{k+1})$$
$$\leq 2 d^{-t} |I|^{-t} \mathbb{E}(\mu(I_L) | F_{k+1}) \mathbb{E}(\mu(I_R) | F_{k+1})$$
$$\leq 2 d^{-t} |I|^{-t} |I_L|^s |I_R|^s$$
$$\leq 2 d^{-t} |I|^{2s-t}$$

- $$\mathbb{E}\left(\int\int_{x \wedge y = I} |x-y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y)\right) \leq 2d^{-t}\mathbb{E}(|I|^{2s-t})$$

- $$\mathbb{E}\Big(\int\int_{x\wedge y=I}|x-y|^{-t}d\mu(x)d\mu(y)\Big)$$
$$\leq 2d^{-t}\mathbb{E}(|I|^{2s-t})$$

- Über alle $I\in E_k$ summieren

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{I\in E_k}\int\int_{x\wedge y=I}|x-y|^{-t}d\mu(x)d\mu(y)\Big)$$
$$\leq 2d^{-t}\mathbb{E}\Big(\sum_{I\in E_k}|I|^{2s-t}\Big)$$
$$= 2d^{-t}\lambda^k$$

mit $\lambda=\mathbb{E}(C_1^{2s-t}+C_2^{2s-t})<1$

- Über alle k aufsummieren:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\int_F \int_F |x-y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y)\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{I \in E_k} \int \int_{x \wedge y = I} |x-y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y)\Big) \\
&\leq 2d^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k < \infty
\end{aligned}
$$

Verallgemeinerung der Konstruktion:

- Zerteilung des Intervalls in m Teilmengen V
- V eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit dem Abschluss $\overline{V}$
- Die Menge E_k ist eine Vereinigung von m^k abgeschlossenen Mengen $\overline{V}_{i_1,..i_k}$, wobei $i_j = 1, ...m$
- $V_{i_1,..i_k}$ ist entweder ähnlich zu V oder $= \emptyset$
- N Anzahl der Mengen $V_1, ..., V_k$ die nicht leer sind.
- Fraktal $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$

Theorem 2

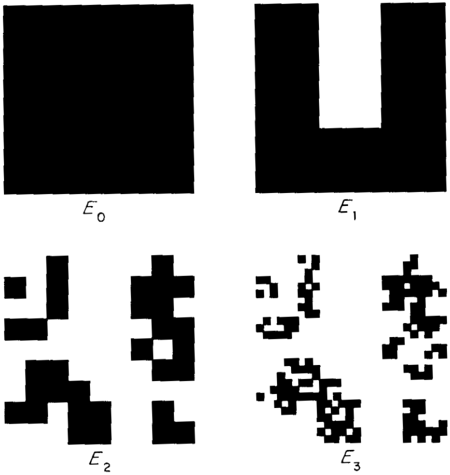
Die zufällige Menge F, die so konstruiert wurde, ist mit Wahrscheinlichkeit q leer, mit $t = q$ die kleinste nicht negative Lösung der Polynom Gleichung.

$$f(t) = \sum_{j=0}^{m} P(N = j)t^j = t \tag{3}$$

Mit der Wahrscheinlichkeit $1 - q$ hat die Menge F die Hausdorff und Box Dimension s mit

$$\mathbb{E}(\sum_{j=0}^{m} C_i^s) = 1 \tag{4}$$

Fractal Percolation



Proposition

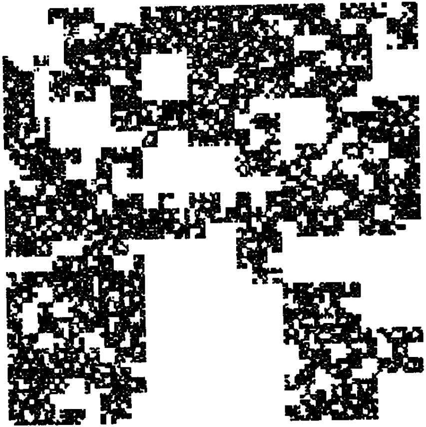
Sei $p \in [0, 1]$ gegeben und sei $t = q$ die kleinste positive Lösung der Gleichung

$$t = (pt + 1 - p)^9 \tag{5}$$

Dann ist F_p mit Wahrscheinlichkeit q leer. Wenn $p \leq \frac{1}{9}$ ist $q = 1$. Wenn $\frac{1}{9} < p \leq 1$ dann ist $0 < q < 1$ und mit Wahrscheinlichkeit $1 - q$ ist $dim_H F = dim_B F = log 9p/log 3$.

(a)

Theorem 3



(b)

- Mit $\frac{1}{9} < p < \frac{1}{3}$ gilt mit Wahrscheinlichkeit 1, dass $F_p = \emptyset$ oder $dim_H F_p = log 9p / log 3 < 1$ und F total unzusammenhängend.
- Sei $0,999 < p < 1$. Dann exisitiert eine positive Wahrscheinlichkeit, dass das zufällige Fraktal F_p die linken und rechten Seiten von E_0 verbindet.

Definition

Wenn F die linken und rechten Seiten des Quadrats E_0 verbindet, sagen wir, dass Percolation (Filtration) zwischen den Seiten von E_0 auftritt.

Theorem

Es gibt eine kritische Zahl p_c mit $0,333 < p_c < 0,999$ so dass gilt, wenn $0 < p < p_c$ dann ist F_p mit Wahrscheinlichkeit 1 total unzusammenhängend, aber wenn $p_c < p < 1$ dann gibt es eine positive Wahrscheinlichkeit, dass F_p die linken und rechten Seiten von E_0 verbindet.