Seminar Fraktale

Kapitel 13 – Dynamical Systems

Von Dirk Simon

Übersicht

- Einführung und Definitionen
  - Dynamische Systeme
  - Attraktoren
  - Chaos
- Ein paar Beispiele
- Anwendungen

Einführung

- Anwendung für Dynamische Systeme in
  - Zahlentheorie
  - Stochastik
  - Geographie
  - Wirtschaft
  - Physik
  - Biologie
  - Maschinenbau
- Es werden auch vor allem PCs aufgrund immer komplizierter werdenden Modelle benötigt

Dynamische Systeme

- Ein diskretes Dynamisches System ist ein iteratives Programm $\{f^k(x)\}$

- Hierbei interessieren wir uns für das Verhalten von $\{f^k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ für große k und verschiedene Startpunkte $x \varepsilon D$, wobei D eine Teilmenge von R^n ist

Dynamische Systeme

Ein dynamisches System ist gegeben durch eine Gruppenwirkung. Genauer:

Ein dynamisches System ist ein Tripel (G,Ω,φ), wobei $(G, \cdot, e)$ eine Halbgruppe, Ω eine nichtleere Menge und $\Phi: \Omega\times G \rightarrow \Omega$ eine Abbildung sei, so dass für alle $x \varepsilon \Omega$, $g,h \varepsilon G$ gilt:

- $\varphi(x,e) = x$ und
- $\Phi(\Phi(x,g),h) = \Phi(x,g\cdot h)$

Zusammenhang der Formeln

- Man sieht dass die oben gegebenen Gleichungen auch allgemein gelten
- $\Phi(x,n) = f^n(x)$ und $n \varepsilon N_0$

$\Rightarrow$ $\Phi(\varphi(x,m)n)$ mit $m \varepsilon N_0$

$= f^n(\varphi(x,m))$

$= f^n(f^m(x))$

$= f^{n+m}(x)$

$=\Phi(x,n+m)$

Dynamische Systeme

- Diskretes System
  - Zustandsänderungen bei Zeitsprüngen
  - bei Zeit t gegen 0 erhält man Gleichungssystem
- Kontinuierliches System
  - unabhängiges System

Oft werden diese Systeme chaotisch, wenn man sie für große Zeitintervalle t betrachtet. Außerdem betrachtet man die sogenannten Attraktoren.

Attraktoren

Ein Attraktor A ist eine Untermenge des Phasenraums, die unabhängig von der Zeitentwicklung eines dynamischen Systems ist. (Dies bedeutet er hat die Eigenschaft, dass jeder Punkt dieser Untermenge A durch das dynamische System wieder auf einen Punkt in derselben abgebildet wird; hinzu kommt dass jeder Punkt auch Bildpunkt zumindest eines Punktes ist, kurz S(t)A=A.)

Die zweite Eigenschaft des Attraktors ist, dass er eine offene Umgebung besitzt, dessen Punkte sich im Laufe der Zeit immer mehr dem Attrakor nähern.

Chaos

- Ein Attraktor F ist genau dann chaotisch wenn folgende Bedingungen gelten:
  - Der Orbit von des Schritts $\{f^k(x)\}$ ist dicht in F für einige $x \varepsilon F$
  - Die periodischen Abbildungspunkte von f auf F ($f^p(x)=x$ für beliebiges $p \varepsilon N$) sind dich in F
  - f hat sensitive dependence on initial conditions. Das bedeutet soviel wie, dass es für einen Punkt x und Punkte, die in einer sehr kleinen Umgebung um x liegen, nicht bedeutet dass diese auch nach der Abbildung mit f wieder nah zusammen liegen.

(In Worten bedeutet dies, dass man F nicht mehr in kleinere Mengen zerteilen kann (i) dass es eine regulären Aufbau hat (ii) und dass das Verhalten von F nicht vohersagbar ist (iii).)

Logistic map

- Die logistische Abbildung wird meistens als urbildliches Beispiel verwendet, wie komplexes, chaotisches Verhalten aus sehr einfachen nicht linearen dynamischen Gleichungen entstehen kann
- Mathematisch kann dieses wie folgt geschrieben werden:

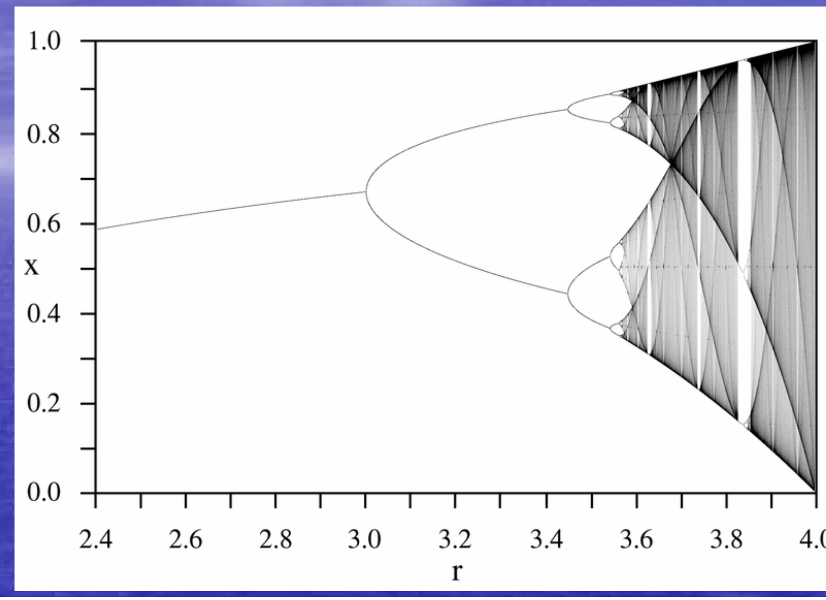
$$x_{n+1}=rx_n(1-x_n)$$

Logistic map

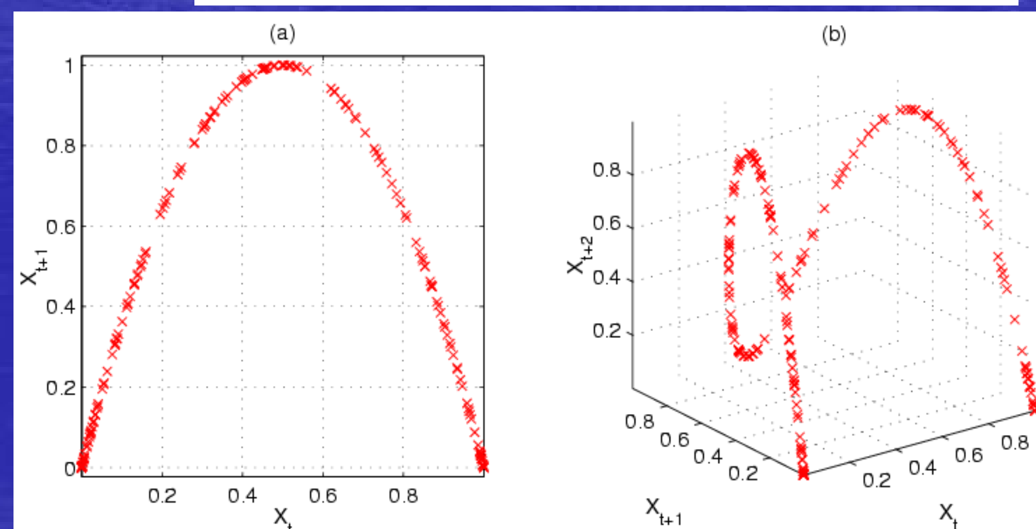
- wobei:
  - x_n ist eine Zahl zwischen null und eins ist und die Bevölkerung im Jahr n bezeichnet, und folglich vertritt x_0 die Ausgangsbevölkerung (an Jahr 0),
  - das r eine positive Zahl ist und stellt eine kombinierte Rate für Reproduktion und Verhungern dar.

Logistic map

- Bifurkationsdiagramm der logistischen Abbildung



- Zwei- und drei-dimenstionale Phasendiagramme zeigen die Falt-und-Streckstrukturen der logistischen Abbuldung.



Übersicht

- Einführung und Definitionen
- Ein paar Beispiele
  - Baker Transformation
  - Horseshoe-Transformation
  - Hénon-Transformation
  - Der Solenoid
- Anwendungen

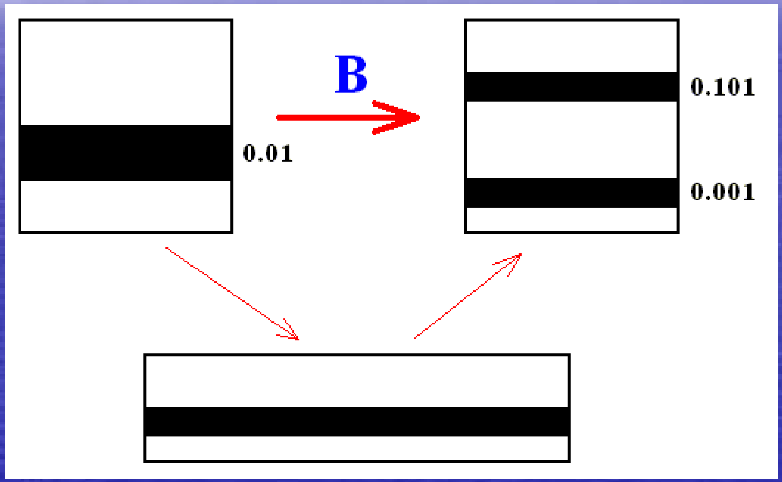
Ein paar Beispiele

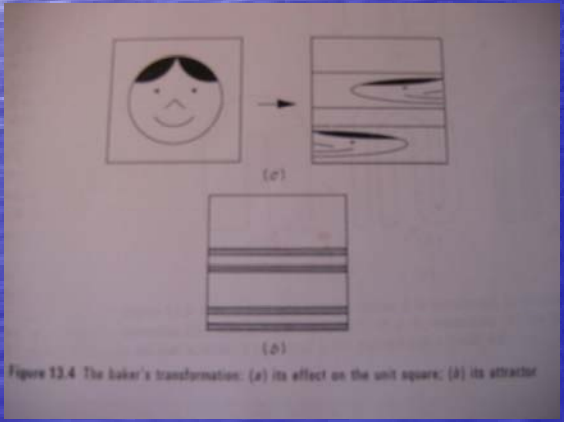
Im Folgenden nun einige häufige bzw. charakteristischen Beispiele für dynamische Systeme mit Attraktoren:

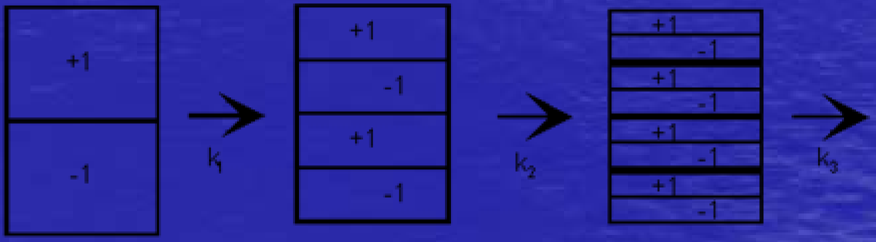
- Die Bäcker-Transformation
- Die Hufeisen-Transformation
- Die Hénon-Transformation

Bäcker-Transformation
(Baker Transformation)

- Die Ursprungsmenge wird um das 2fache gestreckt und dabei in der Höhe gestaucht (wie beim Teig ziehen). Danach wird das entstandene Bild halbiert und mit Abstand in die „Anfangsgröße“ abgebildet







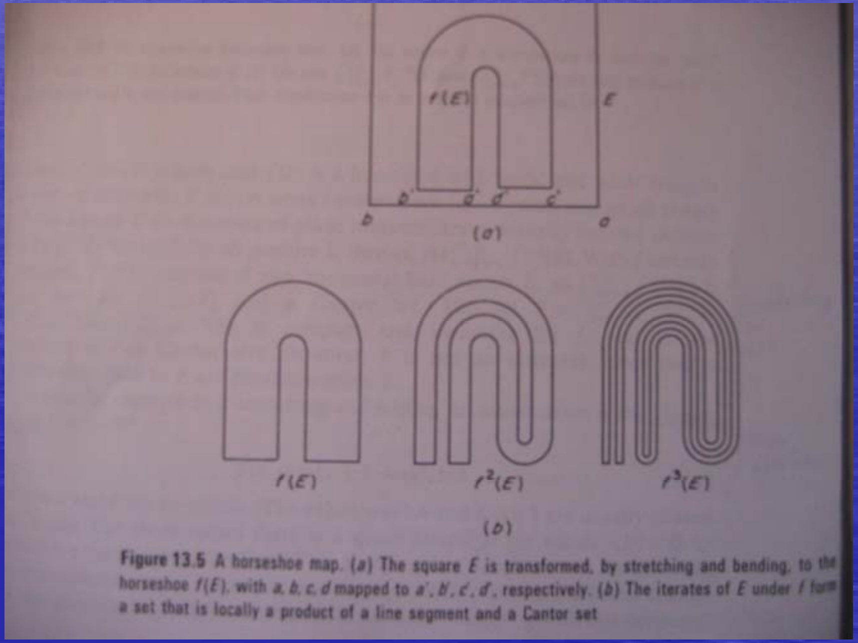
Die Bäcker-Transformation

- Formal kann diese Prozedur so beschrieben werden, dass die Bäcker-Transformation eine Funktion des Einheitsintervalls (entspricht einem eindimensionalen Teig) in sich ist, d.h. $f:[0,1]\rightarrow[0,1]$ mit:

$$f(x) := \begin{cases} 2x & \text{falls } x \in [0, 1/2] \\ -2x + 2 & \text{falls } x \in (1/2, 1] \end{cases}$$

Hufeisen-Transformation

- Die Hufeisen-Abbildung (Horseshoe Transformation) ist eine nichtlineare Abbildung, die in der Chaostheorie Verwendung findet. Sie dient dazu grundlegende Eigenschaften dynamischer Systeme zu untersuchen.
- Ein Quadrat wird zuerst gestaucht und dann gestreckt. Im nächsten Schritt wird der entstandene Streifen in die Form eines Hufeisens umgebogen.



Hufeisen-Transformation

- Hier sieht man das ursprüngliche Quadrat [0,1]x[0,1] und welche Mengen auf welche abgebildet werden.
- Die Schnittmenge F der beiden ist das Produkt zweier Cantormengen
- F ist kein Attraktor, da es Punkte gibt die sehr dicht an F liegen, aber außerhalb von E iteriert werden

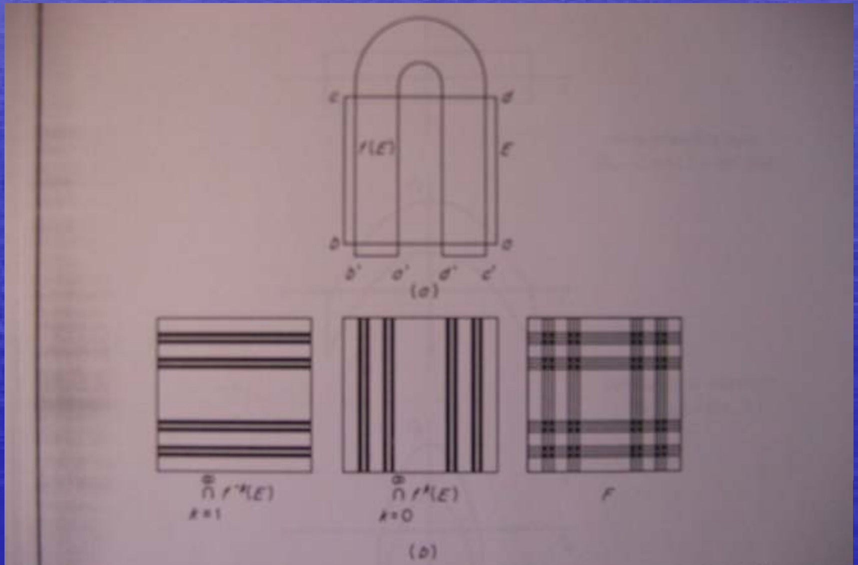


Figure 13.6 An alternative horseshoe map. (a) The square E is transformed so that the 'arch' and 'ends' of $f(E)$ lie outside E. (b) The sets $\bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-k}(E)$ and $\bigcap_{k=0}^{\infty} f^{k}(E)$ are both products of a Cantor set and a unit interval. Their intersection F is an unstable invariant set for f.

Hénon-Transformation

Die Hénon-Abbildung setzt sich aus insgesamt drei Elementarabbildungen zusammen:

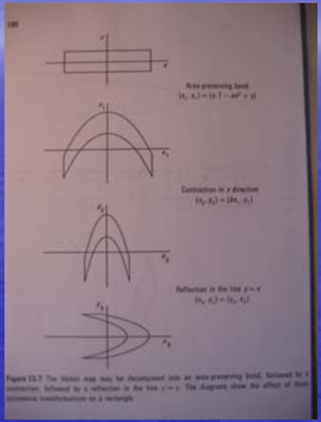
- nichtlineare Verbiegung der y-Koordinate:

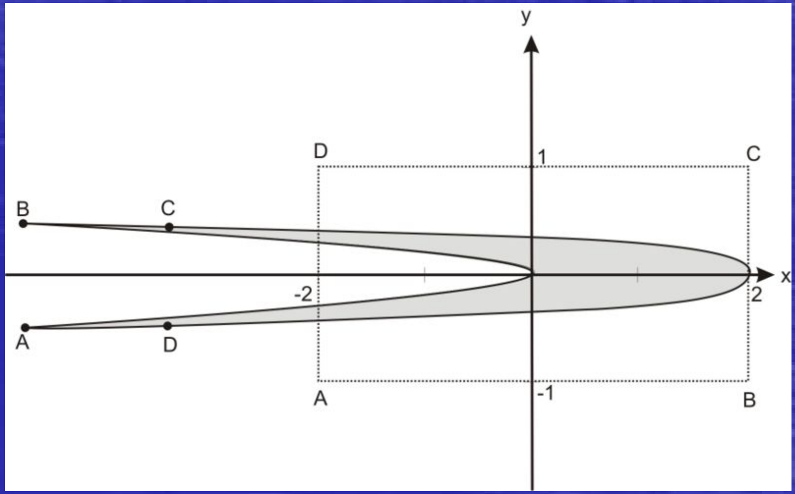
  Abb1(x,y) = (x,1 + y + ax2),
- Kontraktion der x-Koordinate: Abb2(x,y) = (bx,y) für 0<b<1,
- Spiegelung an der Hauptdiagonalen y=x:

  Abb3(x,y) = (y,x).

Eine weitere wichtige Eigenschaft dieser Abbildung ist die Selbstähnlichkeit.

(In einfachen Worten ausgedrückt verstehen wir darunter eine fraktale Vergrößerung eines beliebigen Teilbereichs, der wieder ähnlich zu seinem Anfangsobjekt ist.)





Hénon-Abbildung für die Parameter a=1,4 und b=0,3: hufeisenförmiges Gebilde

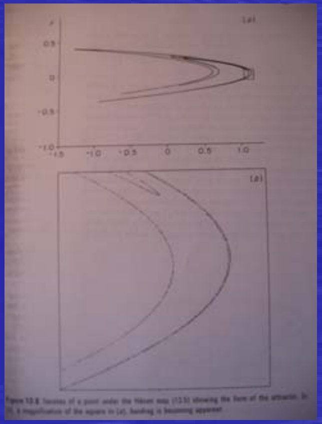
Hénon-Transformation

Formal darstellt der Autor die Hènon-Transformation so dar:

Für eine Funktion $f:\mathrm{R}^2 \rightarrow \mathrm{R}^2$ mit

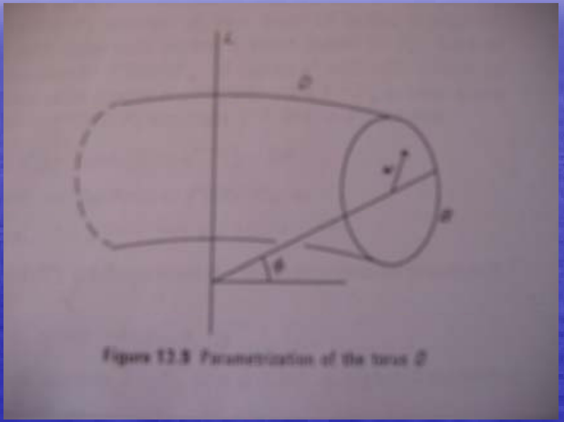
$f(x,y)=(y+1-ax^2,bx)$ mit Konstanten a und b

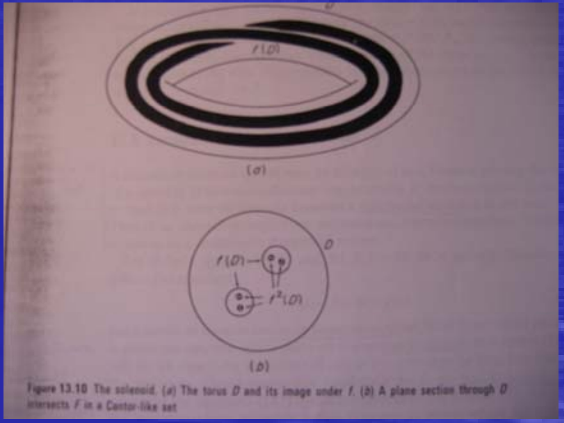
Man kann die Hènon-Transformation auch mehrfach hintereinander anwenden so dass man eine Figur folgender Form bekommt



Der Solenoid

- Der Solenoid Menge die wir beispielsweise auf einem soliden Torus finden(wird im oberen Bild gebildet, $f{:}D \to D$ mit $f(\Phi,w)=(2\Phi(\mathrm{mod}\,2\pi),\ aw+{}^{1}/_{2}\Phi^{\wedge}))$.
- $F=\bigcap_{k=1}^{\infty} f^{k}(D)$ ist eine Menge, die vom soliden Torus in den selben abbildet und im k-ten Schritt 2^{k} mal in diesem verläuft und dabei sich auch der Radius verändert.





Der Solenoid

- Wie im Bild oben auch gezeigt, wird der entstandene „Schlauch" in sich selbst wieder abgebildet und so weiteriteriert.
- Hierbei nimmt die Anzahl der „Schläuche" im Schritt k um 2^k zu und verringert sich der Durchmesser der neuen „Schläuche" im gleichen Verhältnis.

(Dimensionsberechnung in der Ausarbeitung)

Übersicht

- Einführung und Definitionen
- Ein paar Beispiele
- Anwendungen
  - Kontinuierliches Dynamisches System
  - Lorenz Attraktor

Kontinuierliches Dynamisches System

- Für einen Definitionsbereich D und eine glatte Funktion $f:D \rightarrow R^n$ hat die Gleichung

  $$\mathring{x}(t) = {}^{dx}/_{dt} = f(x)$$

  eine Familie von Flugkurven, die D füllen.

- Hierbei ist für jeden Startpunkt x_0 die dazugehörige Flugkurve $x(t)$ eindeutig

Kontinuierliches Dynamisches System

- Zeitunabhängiges Gleichungssystem
- Wie sehr auch die Kurve auf Grund der Parameter variiert, sie geht immer durch den Startpunkt x_0
- keine solcher Kurven kreuzen sich
- Nur begrenze Menge and Attraktoren, wenn Definitionsmenge D eben ist (isolierte Punkte und geschlossene Ringe)

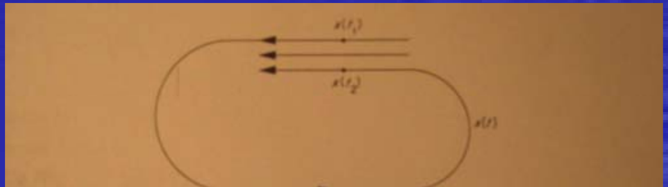


Figure 13.11 A trajectory of a continuous dynamical system in the plane. Assuming that the trajectories vary smoothly, the trajectory shown is 'cut off' from returning too close to $x(t_1)$ any time after t_2

Kontinuierliches Dynamisches System

- Chaos erst ab mindestens 3 Dimensionen möglich.

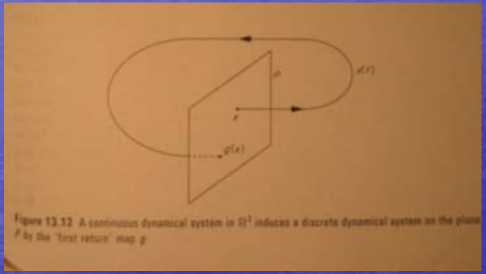
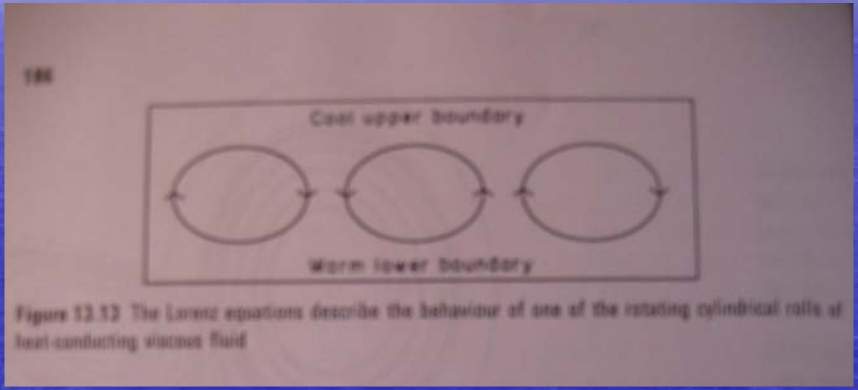


Figure 13.12 A continuous dynamical system in $\mathbb{R}^3$ induces a discrete dynamical system on the plane P by the 'first return' map g

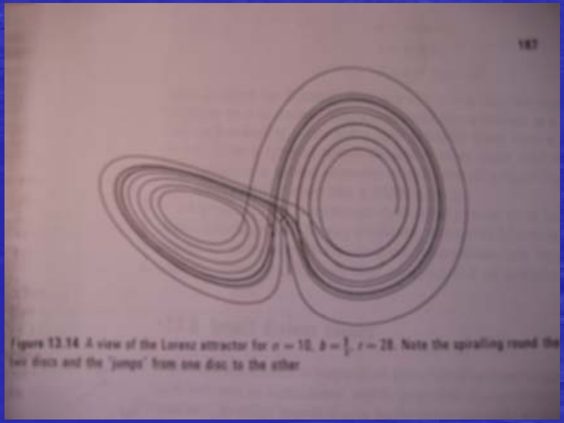
- Können oft nach den bekannten Methoden gelöst werden (Bsp. Transformieren von höherer auf niedrigere Dimension)
- Müssen einzeln untersucht werden da keine Verallgemeinerung möglich

Lorenz-Systeme

- Lorenz untersuchte das thermische Verhalten von Luft



- Man beachte die Schmetterlingsform eines typischen Lorenz Attraktors
- Charakteristisch: Wechsel zwischen den Kreisen



Gleichung des Lorenz Systems

- Das Gleichungssystem des Lorenz Attraktors ist:

  $^{dx}/_{dt} = \sigma(y-x)$

  $^{dy}/_{dt} = x(\rho-z)-y$ und

  $^{dz}/_{dt} = xy-\beta z$

- Hierbei sind σ die Prandtl-Zahl und ρ wird die Rayleigh-Zahl genannt. Alle Zahlen σ,ρ,β sind >0

- Im Folgenden ein paar Veranschaulichungen:

Lorenz

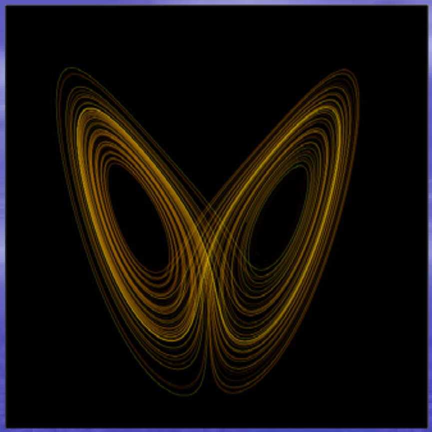
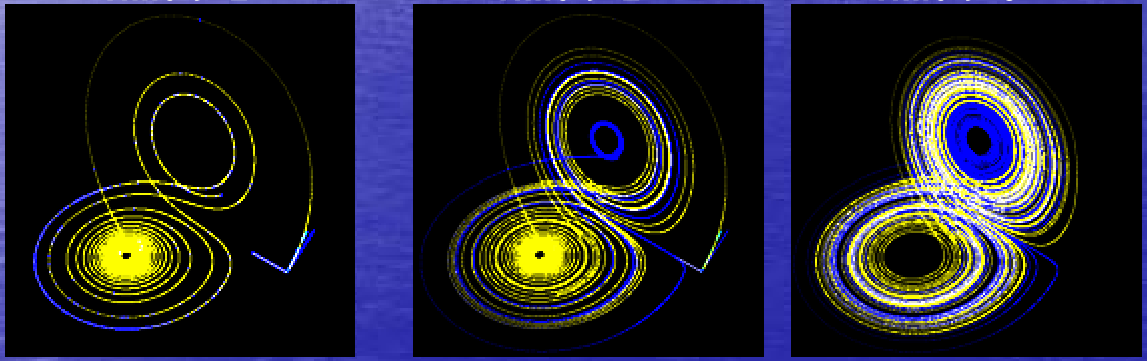


Bild der Flugkurve eines Lorenz Systems für die Werte ρ=28, σ = 10, β = 8/3

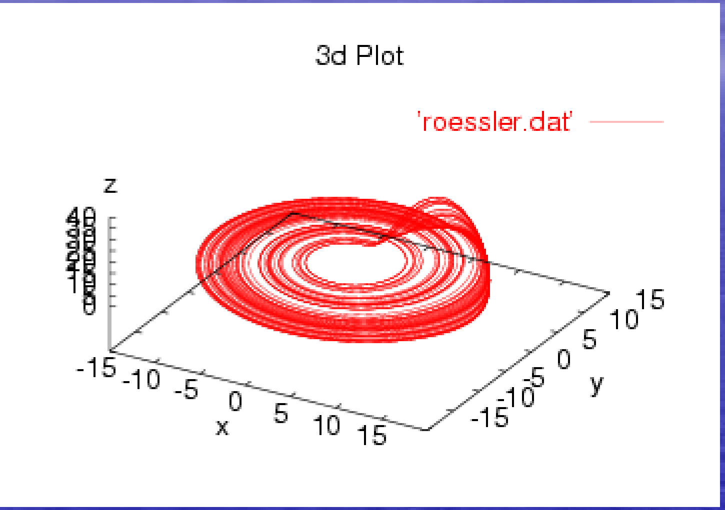
Time t=1 Time t=2 Time t=3



Diese Bilder, die mit den Werten ρ=28, σ = 10 and β = 8/3 gemacht wurden, zeigen drei Zeitsegmente der 3D-Entwicklung zweier Flugkurven (eine in Blau, eine in Gelb) des Lorenz Attraktors, die zwei verschiedene Startpunkte haben und sich lediglich um 10-5 im x-Wert unterscheiden. Anfänglich scheinen die beiden Flugkurven übereinstimmend zu sein (man sieht nur die gelbe) aber mit der Zeit wird der Unterschied deutlich.

Rössler Transformation

Charakteristisch: Wechsel zwischen Innen und Außen im Kreis



Dieser ist ebenfalls ein seltsamer Attraktor, der durch das folgende Differentialgleichungssystem definiert wird:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -(Y+Z)\\ \dot{Y} &= X + aY\\ \dot{Z} &= b + XZ - cZ\end{aligned}$$

Die numerische Lösung sieht für Parameter a=0.15, b=0.20, c=10.0, 10000 Schritte, dt=0.5, wie oben.

Abschlußübersicht

- Einführung und Definitionen
  - Dynamische Systeme
  - Attraktoren
  - Chaos
- Ein paar Beispiele
  - Bäcker Transformation
  - Hufeisen Transformation
  - Hénon-Transformation
  - Der Solenoid
- Anwendungen
  - Continuous dynamical Systems
  - Lorenz Attraktor
  - Rössler Attraktor