# Fraktale Geometrie: Julia-Mengen

Gunnar Völkel

09.01.2006

# Übersicht

# Julia-Menge

## Definition (ausgefüllte Julia-Menge)

Die **ausgefüllte Julia-Menge** des Polynoms $f$ ist definiert als

$$\mathcal{K}(f) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \nrightarrow \infty \ (k \to \infty)\}$$

wobei $f^k$ die $k$-fache Komposition von $f$ ist.

# Julia-Menge

**Definition (ausgefüllte Julia-Menge)**

Die **ausgefüllte Julia-Menge** des Polynoms $f$ ist definiert als

$$\mathcal{K}(f) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \nrightarrow \infty \ (k \to \infty)\}$$

wobei $f^k$ die $k$-fache Komposition von $f$ ist.

**Definition (Julia-Menge)**

Die **Julia-Menge** von $f$ ist der Rand der ausgefüllten Julia-Menge.

$$\mathcal{J}(f) = \partial\mathcal{K}(f)$$

- Abkürzungen: $\mathcal{J} = \mathcal{J}(f)$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}(f)$.

# Julia-Menge

**Definition (ausgefüllte Julia-Menge)**

Die **ausgefüllte Julia-Menge** des Polynoms $f$ ist definiert als

$$\mathcal{K}(f) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \nrightarrow \infty \ (k \to \infty)\}$$

wobei $f^k$ die $k$-fache Komposition von $f$ ist.

**Definition (Julia-Menge)**

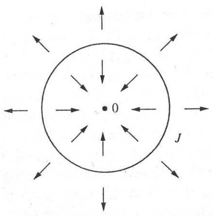
Die **Julia-Menge** von $f$ ist der Rand der ausgefüllten Julia-Menge.

$$\mathcal{J}(f) = \partial\mathcal{K}(f)$$

- Abkürzungen: $\mathcal{J} = \mathcal{J}(f)$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}(f)$.
- im Folgenden: Grad $n \geq 2$
- mit kleinen Änderungen: Theorie auch für rationale Funktionen gültig

# Beispiel: Julia-Menge

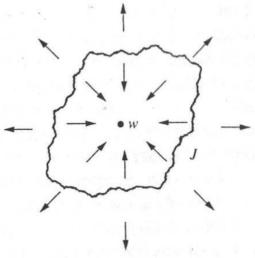
- Beispiel $f(z) = z^2$




- $f^k(z) = z^{2^k}$
- $f^k(z) \to 0$ $(k \to \infty)$ für $|z| < 1$
  $f^k(z) \to \infty$ $(k \to \infty)$ für $|z| > 1$
  $f^k(z)$ auf Einheitskreis für $|z| = 1$
- Spezialfall: $\mathcal{J}$ kein Fraktal

# Beispiel: Julia-Menge (2)

- Modifikation: $f(z) = z^2 + c$, kleine Zahl $c \in \mathbb{C}$




- $f^k(z) \to w$, $z$ klein, $w$ Fixpunkt von $f$ nahe 0
  $f^k(z) \to \infty$ , $z$ groß
- $\mathcal{J}$ fraktale Kurve

# Fixpunkt, periodischer Punkt

**Definition (Fixpunkt, periodischer Punkt)**

Gilt $f(w) = w$, dann heißt $w$ ein **Fixpunkt** von $f$.
Wenn $f^p(w) = w$ für ein $p \geq 1$ gilt, dann heißt $w$ ein **periodischer Punkt** von $f$.
Solch ein $p$ heißt **Periode** von $w$.
$w, f(w), \ldots, f^p(w)$ heißt **Periode** $p$ **Orbit**.

# Fixpunkt, periodischer Punkt

**Definition (Fixpunkt, periodischer Punkt)**

Gilt $f(w) = w$, dann heißt $w$ ein **Fixpunkt** von $f$.
Wenn $f^p(w) = w$ für ein $p \geq 1$ gilt, dann heißt $w$ ein **periodischer Punkt** von $f$.
Solch ein $p$ heißt **Periode** von $w$.
$w, f(w), \ldots, f^p(w)$ heißt **Periode** $p$ **Orbit**.

**Definition (anziehend, abstoßend)**

Sei $w$ ein periodischer Punkt mit Periode $p$ und $(f^p)'(w) = \lambda$.
$w$ heißt **anziehend**, wenn $0 \leq |\lambda| < 1$. In diesem Fall werden nahe Punkte an das Orbit angezogen (durch Iteration von $f$).
$w$ heißt **abstoßend**, wenn $|\lambda| > 1$. In diesem Fall bewegen sich die Punkte nahe dem Orbit weg.

# Divergenzkriterium

## Lemma (Divergenzlemma)

*Sei* $f(z) = \sum_{j=1}^{n} a_j z^j$ *mit* $a_n \neq 0$. *Dann gilt:*

$$\exists r \in \mathbb{R} : |z| \geq r \Rightarrow |f(z)| \geq 2|z|$$

*Insbesondere: Wenn* $|f^m(z)| \geq r$ *für ein* $m \geq 0$, *dann* $f^k(z) \to \infty$ $(k \to \infty)$.
*Folglich gilt: Entweder* $f^k(z) \to \infty$ *oder* $\{f^k(z) : k = 0, 1, 2, \ldots\}$ *ist eine beschränkte Menge.*

## Beweis.

Resultat der Analysis. □

# Kompaktheit, Invarianz, Komposition

**Satz (Kompaktheitssatz*)**

*Sei $f(z)$ ein Polynom. Dann sind die ausgefüllte Julia-Menge $\mathcal{K}(f)$ und die Julia-Menge $\mathcal{J}(f)$ nicht-leer und kompakt mit $\mathcal{J}(f) \subset \mathcal{K}(f)$. Fernerhin hat $\mathcal{J}(f)$ ein leeres Inneres.*

# Kompaktheit, Invarianz, Komposition

**Satz (Kompaktheitssatz*)**

*Sei $f(z)$ ein Polynom. Dann sind die ausgefüllte Julia-Menge $\mathcal{K}(f)$ und die Julia-Menge $\mathcal{J}(f)$ nicht-leer und kompakt mit $\mathcal{J}(f) \subset \mathcal{K}(f)$. Fernerhin hat $\mathcal{J}(f)$ ein leeres Inneres.*

**Satz (Invarianzsatz*)**

*Die Julia-Menge $\mathcal{J} = \mathcal{J}(f)$ von $f$ ist vorwärts und rückwärts invariant unter $f$, das heißt $\mathcal{J} = f(J) = f^{-1}(J)$.*

# Kompaktheit, Invarianz, Komposition

**Satz (Kompaktheitssatz*)**

*Sei $f(z)$ ein Polynom. Dann sind die ausgefüllte Julia-Menge $\mathcal{K}(f)$ und die Julia-Menge $\mathcal{J}(f)$ nicht-leer und kompakt mit $\mathcal{J}(f) \subset \mathcal{K}(f)$. Fernerhin hat $\mathcal{J}(f)$ ein leeres Inneres.*

**Satz (Invarianzsatz*)**

*Die Julia-Menge $\mathcal{J} = \mathcal{J}(f)$ von $f$ ist vorwärts und rückwärts invariant unter $f$, das heißt $\mathcal{J} = f(J) = f^{-1}(J)$.*

**Satz (Kompositionssatz*)**

$\forall p \in \mathbb{N}, p \geq 1 : \mathcal{J}(f^p) = \mathcal{J}(f)$.

# normale Funktionenfamilie

**Definition (normal auf einer Menge)**

Sei eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ gegeben. Sei $g_k : U \to \mathbb{C}\ ,\ k = 1, 2, \ldots$ eine Familie von komplexen analytischen Funktionen (d.h. differenzierbar auf $U$).

# normale Funktionenfamilie

## Definition (normal auf einer Menge)

Sei eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ gegeben. Sei $g_k : U \to \mathbb{C}$ , $k = 1, 2, \ldots$ eine Familie von komplexen analytischen Funktionen (d.h. differenzierbar auf $U$).

Die Familie $\{g_k\}$ heißt **normal auf U**, wenn jede Folge von Funktionen aus $\{g_k\}$ eine Teilfolge hat, die gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $U$ entweder gegen eine *beschränkte analytische Funktion* oder gegen $\infty$ konvergiert.

# normale Funktionenfamilie (2)

## Definition (normal in einem Punkt)

Sei eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ gegeben. Sei $g_k : U \to \mathbb{C}\ ,\ k = 1, 2, \ldots$ eine Familie von komplexen analytischen Funktionen (d.h. differenzierbar auf $U$).

# normale Funktionenfamilie (2)

## Definition (normal in einem Punkt)

Sei eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ gegeben. Sei $g_k : U \to \mathbb{C}\ ,\ k = 1, 2, \ldots$ eine Familie von komplexen analytischen Funktionen (d.h. differenzierbar auf $U$).

Die Familie $\{g_k\}$ ist **normal im Punkt** $w \in U$, wenn eine offene Teilmenge $V \subset U\ ,\ w \in V$ existiert, so dass $\{g_k\}$ eine normale Familie auf $V$ ist.

# normale Funktionenfamilie (2)

## Definition (normal in einem Punkt)

Sei eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ gegeben. Sei $g_k : U \to \mathbb{C}\ ,\ k = 1, 2, \ldots$ eine Familie von komplexen analytischen Funktionen (d.h. differenzierbar auf $U$).

Die Familie $\{g_k\}$ ist **normal im Punkt** $w \in U$, wenn eine offene Teilmenge $V \subset U\ ,\ w \in V$ existiert, so dass $\{g_k\}$ eine normale Familie auf $V$ ist.

äquivalent: Es existiert eine Umgebung $V$ von $w$, in der jede Folge $\{g_k\}$ eine Teilfolge hat, die gegen eine beschränkte analytische Funktion oder gegen $\infty$ konvergiert.

# Eigenschaft komplexer,analytischer Funktionen

**Satz (Satz von Montel)**

*Sei $\{g_k\}$ eine Familie komplexer analytischer Funktionen auf einer offenen Menge $U$. Wenn $\{g_k\}$ keine normale Familie ist, dann gilt für alle $w \in \mathbb{C}$ mit maximal einer Ausnahme, dass $g_k(z) = w$ für ein $z \in U$ und ein $k$.*

**Beweis.**

Siehe Literatur zu komplexer Funktionentheorie. $\square$

# alternative Definition der Julia-Menge

**Satz (alternative Definition der Julia-Menge*)**

$$\boxed{\mathcal{J}(f) = \{z \in \mathbb{C} : \textit{Die Familie } \{f^k\} \textit{ ist nicht normal in } z\}}$$

# alternative Definition der Julia-Menge

## Satz (alternative Definition der Julia-Menge*)

$$\boxed{\mathcal{J}(f) = \{z \in \mathbb{C} : \textit{Die Familie } \{f^k\} \textit{ ist nicht normal in } z\}}$$

## Bemerkung (Rationale Funktionen)

- *als Definition von Julia-Mengen für allgemeine Funktionen (z.B. rationale oder meromorphe Funktionen)*
- *Beachte: rationale Funktion* $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
  $\Rightarrow \mathcal{J}$ *abgeschlossen*
- *aber nicht unbedingt:* $\mathcal{J}$ *beschränkt*
- $\mathcal{J} = \mathbb{C}$ *möglich*

# Abbildungseigenschaft

**Lemma**

*Sei $f$ ein Polynom. Sei $w \in \mathcal{J}(f)$ und $U$ eine Umgebung von $w$. Dann gilt: Für alle $j = 1, 2, \ldots$ ist die Menge $W \equiv \bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(U)$ ganz $\mathbb{C}$ mit Ausnahme von maximal einem möglichen isolierten Punkt.*

*Jede solche Ausnahme ist nicht in $\mathcal{J}(f)$ und ist unabhängig von $w$ und $U$.*

## Beweisskizze.

Sei $w \in \mathcal{J}(f)$.

## Beweisskizze.

Sei $w \in \mathcal{J}(f)$.
alternative Definition der Julia-Menge: $\Rightarrow$ $\{f^k\}_{k=j}^{\infty}$ nicht normal in $w$.

## Beweisskizze.

Sei $w \in \mathcal{J}(f)$.
alternative Definition der Julia-Menge: $\Rightarrow$ $\{f^k\}_{k=j}^{\infty}$ nicht normal in $w$.

$$\overset{\text{Satz v. Montel}}{\Longrightarrow} \quad W \equiv \bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(U) = \mathbb{C} \text{ (mit max. einer Ausnahme)}$$

## Beweisskizze.

Sei $w \in \mathcal{J}(f)$.
alternative Definition der Julia-Menge: $\Rightarrow$ $\{f^k\}_{k=j}^{\infty}$ nicht normal in $w$.

$$\stackrel{\text{Satz v. Montel}}{\Longrightarrow} \qquad W \equiv \bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(U) = \mathbb{C} \text{ (mit max. einer Ausnahme)}$$

Angenommen: $v \notin W$

## Beweisskizze.

Sei $w \in \mathcal{J}(f)$.
alternative Definition der Julia-Menge: $\Rightarrow \ \{f^k\}_{k=j}^{\infty}$ nicht normal in $w$.

$$\overset{\text{Satz v. Montel}}{\Longrightarrow} \qquad W \equiv \bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(U) = \mathbb{C} \text{ (mit max. einer Ausnahme)}$$

Angenommen: $v \notin W$
$\overset{\text{Satz v. Montel}}{\Longrightarrow}$ maximal ein solches $v$

## Beweisskizze.

Sei $w \in \mathcal{J}(f)$.

alternative Definition der Julia-Menge: $\Rightarrow \{f^k\}_{k=j}^{\infty}$ nicht normal in $w$.

$$\overset{\text{Satz v. Montel}}{\Longrightarrow} \quad W \equiv \bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(U) = \mathbb{C} \text{ (mit max. einer Ausnahme)}$$

Angenommen: $v \notin W$

$\overset{\text{Satz v. Montel}}{\Longrightarrow}$ maximal ein solches $v$

$\Longrightarrow$ $v$ einzige Lösung von $f(z) = v$, wegen Invarianz der Julia-Menge

## Beweisskizze.

Sei $w \in \mathcal{J}(f)$.

alternative Definition der Julia-Menge: $\Rightarrow \{f^k\}_{k=j}^{\infty}$ nicht normal in $w$.

$\overset{\text{Satz v. Montel}}{\Longrightarrow} \quad W \equiv \bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(U) = \mathbb{C}$ (mit max. einer Ausnahme)

Angenommen: $v \notin W$

$\overset{\text{Satz v. Montel}}{\Longrightarrow}$ maximal ein solches $v$

$\Longrightarrow v$ einzige Lösung von $f(z) = v$, wegen Invarianz der Julia-Menge

$\Longrightarrow f(z) - v = c(z-v)^n$ für eine Konstante $c$

## Beweisskizze.

Sei $w \in \mathcal{J}(f)$.
alternative Definition der Julia-Menge: $\Rightarrow \{f^k\}_{k=j}^{\infty}$ nicht normal in $w$.

$$\overset{\text{Satz v. Montel}}{\Longrightarrow} \quad W \equiv \bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(U) = \mathbb{C} \text{ (mit max. einer Ausnahme)}$$

Angenommen: $v \notin W$
$\overset{\text{Satz v. Montel}}{\Longrightarrow}$ maximal ein solches $v$
$\Longrightarrow v$ einzige Lösung von $f(z) = v$, wegen Invarianz der Julia-Menge
$\Longrightarrow f(z) - v = c(z - v)^n$ für eine Konstante $c$
$\Longrightarrow z$ ausreichend nah zu $v \Rightarrow f^k(z) - v \xrightarrow{\text{glm}} 0$
(z.B. auf $\{z : |z - v| < (2c)^{-\frac{1}{n-1}}\}$

## Beweisskizze.

Sei $w \in \mathcal{J}(f)$.
alternative Definition der Julia-Menge: $\Rightarrow \{f^k\}_{k=j}^{\infty}$ nicht normal in $w$.

$$\overset{\text{Satz v. Montel}}{\Longrightarrow} \quad W \equiv \bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(U) = \mathbb{C} \text{ (mit max. einer Ausnahme)}$$

Angenommen: $v \notin W$

$\overset{\text{Satz v. Montel}}{\Longrightarrow}$ maximal ein solches $v$

$\Longrightarrow v$ einzige Lösung von $f(z) = v$, wegen Invarianz der Julia-Menge

$\Longrightarrow f(z) - v = c(z - v)^n$ für eine Konstante $c$

$\Longrightarrow z$ ausreichend nah zu $v \Rightarrow f^k(z) - v \xrightarrow{\text{glm}} 0$

(z.B. auf $\{z : |z - v| < (2c)^{-\frac{1}{n-1}}\}$

$\Longrightarrow \{f^k\}$ normal in $v$

## Beweisskizze.

Sei $w \in \mathcal{J}(f)$.
alternative Definition der Julia-Menge: $\Rightarrow \{f^k\}_{k=j}^{\infty}$ nicht normal in $w$.

$$\overset{\text{Satz v. Montel}}{\Longrightarrow} \quad W \equiv \bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(U) = \mathbb{C} \text{ (mit max. einer Ausnahme)}$$

Angenommen: $v \notin W$
$\overset{\text{Satz v. Montel}}{\Longrightarrow}$ maximal ein solches $v$
$\Longrightarrow v$ einzige Lösung von $f(z) = v$, wegen Invarianz der Julia-Menge
$\Longrightarrow f(z) - v = c(z-v)^n$ für eine Konstante $c$
$\Longrightarrow z$ ausreichend nah zu $v \Rightarrow f^k(z) - v \xrightarrow{\text{glm}} 0$
(z.B. auf $\{z : |z - v| < (2c)^{-\frac{1}{n-1}}\}$
$\Longrightarrow \{f^k\}$ normal in $v$
$\Longrightarrow v \notin \mathcal{J}(f)$ und $v$ nur vom Polynom $f$ abhängig $\square$

# Generierung der Julia-Menge

## Lemma (Generierungslemma)

(a) *Das folgende gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit maximal einer Ausnahme: Wenn $U$ eine offene Menge ist die $\mathcal{J}(f)$ schneidet, dann schneidet $f^{-k}(z)$ $U$ für unendlich viele Werte von $k$.*

(b) $z \in \mathcal{J}(f) \implies \mathcal{J}(f)$ *ist der Abschluss von* $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$

**Beweis.**

(a) Vorauss: $z$ ist nicht der Ausnahmepunkt aus vorigem Lemma.

## Beweis.

(a) Vorauss: $z$ ist nicht der Ausnahmepunkt aus vorigem Lemma.
$\Rightarrow \; z \in f^k(U) \quad \Rightarrow \; f^{-k}(z)$ schneidet $U$ für unendlich viele $k$

## Beweis.

(a) Vorauss: $z$ ist nicht der Ausnahmepunkt aus vorigem Lemma.
$\Rightarrow \; z \in f^k(U) \quad \Rightarrow \; f^{-k}(z)$ schneidet $U$ für unendlich viele $k$

(b) $z \in \mathcal{J}(f) \quad \Rightarrow \; f^{-k}(z) \subset \mathcal{J}(f)$ wegen Invarianz der Julia-Menge

## Beweis.

(a) Vorauss: $z$ ist nicht der Ausnahmepunkt aus vorigem Lemma.
$\Rightarrow \; z \in f^k(U) \quad \Rightarrow \; f^{-k}(z)$ schneidet $U$ für unendlich viele $k$

(b) $z \in \mathcal{J}(f) \quad \Rightarrow f^{-k}(z) \subset \mathcal{J}(f)$ wegen Invarianz der Julia-Menge

$$\Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z) \subset \mathcal{J}(f) \text{ und } \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)} \subset \mathcal{J}(f)$$

## Beweis.

(a) Vorauss: $z$ ist nicht der Ausnahmepunkt aus vorigem Lemma.
$\Rightarrow\; z \in f^k(U) \quad \Rightarrow f^{-k}(z)$ schneidet $U$ für unendlich viele $k$

(b) $z \in \mathcal{J}(f) \quad \Rightarrow f^{-k}(z) \subset \mathcal{J}(f)$ wegen Invarianz der Julia-Menge

$$\Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z) \subset \mathcal{J}(f) \text{ und } \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)} \subset \mathcal{J}(f)$$

Andererseits: $z \in \mathcal{J}(f)$. Sei $U$ offene Menge mit $z \in U$.

## Beweis.

(a) Vorauss: $z$ ist nicht der Ausnahmepunkt aus vorigem Lemma.
$\Rightarrow\; z \in f^k(U) \quad \Rightarrow\; f^{-k}(z)$ schneidet $U$ für unendlich viele $k$

(b) $z \in \mathcal{J}(f) \quad \Rightarrow\; f^{-k}(z) \subset \mathcal{J}(f)$ wegen Invarianz der Julia-Menge

$$\Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z) \subset \mathcal{J}(f) \text{ und } \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)} \subset \mathcal{J}(f)$$

Andererseits: $z \in \mathcal{J}(f)$. Sei $U$ offene Menge mit $z \in U$.
$\overset{(a)}{\Longrightarrow} f^{-k}(z)$ schneidet $U$ für ein $k$

## Beweis.

(a) Vorauss: $z$ ist nicht der Ausnahmepunkt aus vorigem Lemma.
$\Rightarrow \; z \in f^k(U) \quad \Rightarrow f^{-k}(z)$ schneidet $U$ für unendlich viele $k$

(b) $z \in \mathcal{J}(f) \quad \Rightarrow f^{-k}(z) \subset \mathcal{J}(f)$ wegen Invarianz der Julia-Menge

$$\Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z) \subset \mathcal{J}(f) \text{ und } \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)} \subset \mathcal{J}(f)$$

Andererseits: $z \in \mathcal{J}(f)$. Sei $U$ offene Menge mit $z \in U$.
$\overset{(a)}{\Longrightarrow} f^{-k}(z)$ schneidet $U$ für ein $k$
$\Longrightarrow z$ kann nicht der Ausnahmepunkt sein.

## Beweis.

(a) Vorauss: $z$ ist nicht der Ausnahmepunkt aus vorigem Lemma.
$\Rightarrow \; z \in f^k(U) \quad \Rightarrow f^{-k}(z)$ schneidet $U$ für unendlich viele $k$

(b) $z \in \mathcal{J}(f) \quad \Rightarrow f^{-k}(z) \subset \mathcal{J}(f)$ wegen Invarianz der Julia-Menge

$$\Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z) \subset \mathcal{J}(f) \text{ und } \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)} \subset \mathcal{J}(f)$$

Andererseits: $z \in \mathcal{J}(f)$. Sei $U$ offene Menge mit $z \in U$.
$\overset{(a)}{\Longrightarrow} f^{-k}(z)$ schneidet $U$ für ein $k$
$\Longrightarrow z$ kann nicht der Ausnahmepunkt sein.

$$\Longrightarrow z \in \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)}$$

$\square$

# perfekte Menge

**Satz**

*$\mathcal{J}(f)$ ist eine perfekte Menge (d.h. abgeschlossen und ohne isolierte Punkte) und daher nicht abzählbar.*

## Beweisskizze.

$v \in \mathcal{J}(f)$ und $U := U(v)$. Z.z.: $U$ enthält andere Punkte von $\mathcal{J}(f)$.

## Beweisskizze.

$v \in \mathcal{J}(f)$ und $U := U(v)$. Z.z.: $U$ enthält andere Punkte von $\mathcal{J}(f)$.

3 Fälle unterscheiden:

*(1) v kein Fixpunkt, kein periodischer Punkt von f:*

## Beweisskizze.

$v \in \mathcal{J}(f)$ und $U := U(v)$. Z.z.: $U$ enthält andere Punkte von $\mathcal{J}(f)$.

3 Fälle unterscheiden:

*(1) v kein Fixpunkt, kein periodischer Punkt von $f$:*

$$\overset{\text{Generierungslemma(b)}}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{J}(f) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(v)}$$

## Beweisskizze.

$v \in \mathcal{J}(f)$ und $U := U(v)$. Z.z.: $U$ enthält andere Punkte von $\mathcal{J}(f)$.

3 Fälle unterscheiden:

*(1) v kein Fixpunkt, kein periodischer Punkt von f:*

$$\xRightarrow{\text{Generierungslemma(b)}} \quad \mathcal{J}(f) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(v)}$$

$$\xRightarrow{\text{Invarianzsatz}} \quad \exists z \in f^{-k}(v) \subset \mathcal{J}(f) \ : \ z \in U \text{ für ein } k \geq 1 \text{ und } z \neq v$$

## Beweisskizze.

$v \in \mathcal{J}(f)$ und $U := U(v)$. Z.z.: $U$ enthält andere Punkte von $\mathcal{J}(f)$.
3 Fälle unterscheiden:

*(1) v kein Fixpunkt, kein periodischer Punkt von f:*

$$\overset{\text{Generierungslemma(b)}}{\Longrightarrow} \qquad \mathcal{J}(f) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(v)}$$

$$\overset{\text{Invarianzsatz}}{\Longrightarrow} \qquad \exists z \in f^{-k}(v) \subset \mathcal{J}(f) \ : \ z \in U \text{ für ein } k \geq 1 \text{ und } z \neq v$$

Andere Fälle auf (1) zurückgeführt.

## Beweisskizze.

$v \in \mathcal{J}(f)$ und $U := U(v)$. Z.z.: $U$ enthält andere Punkte von $\mathcal{J}(f)$.
3 Fälle unterscheiden:

*(1) v kein Fixpunkt, kein periodischer Punkt von f:*

$$\overset{\text{Generierungslemma(b)}}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{J}(f) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(v)}$$

$$\overset{\text{Invarianzsatz}}{\Longrightarrow} \quad \exists z \in f^{-k}(v) \subset \mathcal{J}(f) \ : \ z \in U \text{ für ein } k \geq 1 \text{ und } z \neq v$$

Andere Fälle auf (1) zurückgeführt.

$\Longrightarrow$ $\mathcal{J}(f)$ keine isolierten Punkte. $\mathcal{J}(f)$ auch abgeschlossen $\Rightarrow \mathcal{J}(f)$ perfekt. Jede perfekte Menge nicht abzählbar. $\square$

# wichtiges Resultat

**Satz**

*Ist $f$ ein Polynom, dann ist $\mathcal{J}(f)$ der Abschluss der abstoßenden periodischen Punkte von $f$.*

# wichtiges Resultat

**Satz**

*Ist $f$ ein Polynom, dann ist $\mathcal{J}(f)$ der Abschluss der abstoßenden periodischen Punkte von $f$.*

Beweis aus Zeitgründen erst am Ende des Vortrags (falls gewünscht)

# Bew.(1): Abschluss der abst., period. Punkte von $f$ in $\mathcal{J}(f)$

**Beweis ($w$ abst., period. Punkt $\Rightarrow$ $w \in \mathcal{J}(f)$).**

Sei $w$ *abstoßender, periodischer Punkt* von $f$ mit Periode $p$.

# Bew.(1): Abschluss der abst., period. Punkte von $f$ in $\mathcal{J}(f)$

**Beweis ($w$ abst., period. Punkt $\Rightarrow$ $w \in \mathcal{J}(f)$).**

Sei $w$ *abstoßender, periodischer Punkt* von $f$ mit Periode $p$.

$\Rightarrow$ $w$ ein *abstoßender Fixpunkt* von $g := f^p$

# Bew.(1): Abschluss der abst., period. Punkte von $f$ in $\mathcal{J}(f)$

**Beweis ($w$ abst., period. Punkt $\Rightarrow$ $w \in \mathcal{J}(f)$).**

Sei $w$ *abstoßender, periodischer Punkt* von $f$ mit Periode $p$.

$\Rightarrow$ $w$ ein *abstoßender Fixpunkt* von $g := f^p$

<u>Ann.:</u> $\{g^k\}$ normal in $w$

# Bew.(1): Abschluss der abst., period. Punkte von $f$ in $\mathcal{J}(f)$

**Beweis ($w$ abst., period. Punkt $\Rightarrow\ w \in \mathcal{J}(f)$).**

Sei $w$ *abstoßender, periodischer Punkt* von $f$ mit Periode $p$.
$\Rightarrow\ w$ ein *abstoßender Fixpunkt* von $g := f^p$

Ann.: $\{g^k\}$ normal in $w$
$\Rightarrow\ \exists V := V(w)$ offen : $\{g^{k_i}\} \to g_0$ (nicht $\infty$, da $g^k(w) = w\ \forall k$)

# Bew.(1): Abschluss der abst., period. Punkte von $f$ in $\mathcal{J}(f)$

**Beweis ($w$ abst., period. Punkt $\Rightarrow\ w \in \mathcal{J}(f)$).**

Sei $w$ *abstoßender, periodischer Punkt* von $f$ mit Periode $p$.
$\Rightarrow\ w$ ein *abstoßender Fixpunkt* von $g := f^p$

<u>Ann.:</u> $\{g^k\}$ normal in $w$
$\Rightarrow\ \exists V := V(w)$ offen : $\{g^{k_i}\} \to g_0$ (nicht $\infty$, da $g^k(w) = w\ \forall k$)
$\Rightarrow\ \left(g^{k_i}\right)'(z) \to g_0{}'(z)$, wenn $z \in V$

# Bew.(1): Abschluss der abst., period. Punkte von $f$ in $\mathcal{J}(f)$

**Beweis ($w$ abst., period. Punkt $\Rightarrow$ $w \in \mathcal{J}(f)$).**

Sei $w$ *abstoßender, periodischer Punkt* von $f$ mit Periode $p$.
$\Rightarrow$ $w$ ein *abstoßender Fixpunkt* von $g := f^p$

Ann.: $\{g^k\}$ normal in $w$
$\Rightarrow$ $\exists V := V(w)$ offen : $\{g^{k_i}\} \to g_0$ (nicht $\infty$, da $g^k(w) = w\ \forall k$)
$\Rightarrow$ $\left(g^{k_i}\right)'(z) \to {g_0}'(z)$, wenn $z \in V$
*Kettenregel:* $\left|\left(g^{k_i}\right)'(w)\right| = \left|(g'(w))^{k_i}\right| \to \infty$, da $w$ ein abstoßender Fixpunkt ist ($|g'(w)| > 1$).

# Bew.(1): Abschluss der abst., period. Punkte von $f$ in $\mathcal{J}(f)$

**Beweis ($w$ abst., period. Punkt $\Rightarrow$ $w \in \mathcal{J}(f)$).**

Sei $w$ *abstoßender, periodischer Punkt* von $f$ mit Periode $p$.
$\Rightarrow$ $w$ ein *abstoßender Fixpunkt* von $g := f^p$

Ann.: $\{g^k\}$ normal in $w$
$\Rightarrow$ $\exists V := V(w)$ offen : $\{g^{k_i}\} \to g_0$ (nicht $\infty$, da $g^k(w) = w \; \forall k$)
$\Rightarrow$ $\left(g^{k_i}\right)'(z) \to {g_0}'(z)$, wenn $z \in V$
*Kettenregel:* $\left|\left(g^{k_i}\right)'(w)\right| = \left|(g'(w))^{k_i}\right| \to \infty$, da $w$ ein abstoßender Fixpunkt ist ($|g'(w)| > 1$).
Widerspruch! zur Endlichkeit von ${g_0}'(w)$

# Bew.(1): Abschluss der abst., period. Punkte von $f$ in $\mathcal{J}(f)$

**Beweis ($w$ abst., period. Punkt $\Rightarrow$ $w \in \mathcal{J}(f)$).**

Sei $w$ *abstoßender, periodischer Punkt* von $f$ mit Periode $p$.
$\Rightarrow$ $w$ ein *abstoßender Fixpunkt* von $g := f^p$

Ann.: $\{g^k\}$ normal in $w$
$\Rightarrow$ $\exists V := V(w)$ offen : $\{g^{k_i}\} \to g_0$ (nicht $\infty$, da $g^k(w) = w \; \forall k$)
$\Rightarrow$ $\left(g^{k_i}\right)'(z) \to g_0{}'(z)$, wenn $z \in V$
*Kettenregel:* $\left|\left(g^{k_i}\right)'(w)\right| = \left|(g'(w))^{k_i}\right| \to \infty$, da $w$ ein abstoßender Fixpunkt ist ($|g'(w)| > 1$).
Widerspruch! zur Endlichkeit von $g_0{}'(w)$
$\Rightarrow$ $\{g^k\}$ in $w$ nicht normal

# Bew.(1): Abschluss der abst., period. Punkte von $f$ in $\mathcal{J}(f)$

**Beweis ($w$ abst., period. Punkt $\Rightarrow$ $w \in \mathcal{J}(f)$).**

Sei $w$ *abstoßender, periodischer Punkt* von $f$ mit Periode $p$.
$\Rightarrow$ $w$ ein *abstoßender Fixpunkt* von $g := f^p$

Ann.: $\{g^k\}$ normal in $w$
$\Rightarrow$ $\exists V := V(w)$ offen : $\{g^{k_i}\} \to g_0$ (nicht $\infty$, da $g^k(w) = w\ \forall k$)
$\Rightarrow$ $\left(g^{k_i}\right)'(z) \to {g_0}'(z)$, wenn $z \in V$
*Kettenregel:* $\left|\left(g^{k_i}\right)'(w)\right| = \left|(g'(w))^{k_i}\right| \to \infty$, da $w$ ein abstoßender Fixpunkt ist ($|g'(w)| > 1$).
Widerspruch! zur Endlichkeit von ${g_0}'(w)$
$\Rightarrow$ $\{g^k\}$ in $w$ nicht normal
$\Rightarrow$ $w \in \mathcal{J}(g) = \mathcal{J}(f^p) = \mathcal{J}(f)$ nach dem Kompositionssatz. $\square$

# Bew.(2): Abschluss der abst., period. Punkte von $f$ in $\mathcal{J}(f)$

**Beweis (Abschluss).**

$\mathcal{J}(f)$ abgeschlossen (Kompaktheitssatz)

# Bew.(2): Abschluss der abst., period. Punkte von $f$ in $\mathcal{J}(f)$

**Beweis (Abschluss).**

$\mathcal{J}(f)$ abgeschlossen (Kompaktheitssatz)

$$\implies \quad \overline{\{w \in \mathbb{C} : w \text{ abst., period. Punkt von } f\}} \subset \mathcal{J}(f)$$

# Bew.(2): Abschluss der abst., period. Punkte von $f$ in $\mathcal{J}(f)$

**Beweis (Abschluss).**

$\mathcal{J}(f)$ abgeschlossen (Kompaktheitssatz)

$$\Longrightarrow \quad \overline{\{w \in \mathbb{C} : w \text{ abst., period. Punkt von } f\}} \subset \mathcal{J}(f)$$

Z.z.:

$w \in \mathcal{J}(f) \quad \Rightarrow \quad w \in \overline{\{z \in \mathbb{C} : z \text{ abst., period. Punkt von } f\}}$ $\square$

# Bew.(3): $\mathcal{J}(f)$ im Abschluss der abst., period. Punkte von $f$

**Beweis (Konstruktion einer Hilfsfunktion).**

Sei $E = \{w \in \mathcal{J}(f) : \exists v \neq w : f(v) = w \, , \, f'(v) \neq 0\}$.

# Bew.(3): $\mathcal{J}(f)$ im Abschluss der abst., period. Punkte von $f$

**Beweis (Konstruktion einer Hilfsfunktion).**

Sei $E = \{w \in \mathcal{J}(f) : \exists v \neq w : f(v) = w\ ,\ f'(v) \neq 0\}$.
Ann.: $w \in E$

# Bew.(3): $\mathcal{J}(f)$ im Abschluss der abst., period. Punkte von $f$

**Beweis (Konstruktion einer Hilfsfunktion).**

Sei $E = \{w \in \mathcal{J}(f) : \exists v \neq w : f(v) = w \ , \ f'(v) \neq 0\}$.

Ann.: $w \in E$

$\Rightarrow \ \exists V := V(w)$ offen $\exists f^{-1} : V \to \mathbb{C} \setminus V$, $f^{-1}(w) = v \neq w$ und $f^{-1}$ lokal analytisch.

# Bew.(3): $\mathcal{J}(f)$ im Abschluss der abst., period. Punkte von $f$

**Beweis (Konstruktion einer Hilfsfunktion).**

Sei $E = \{w \in \mathcal{J}(f) : \exists v \neq w : f(v) = w \; , \; f'(v) \neq 0\}$.

Ann.: $w \in E$

$\Rightarrow \; \exists V := V(w)$ offen $\exists f^{-1} : V \to \mathbb{C} \setminus V$, $f^{-1}(w) = v \neq w$ und $f^{-1}$ lokal analytisch.

Sei $\{h_k\}$ Familie von analytischen Funktionen auf $V$:

$$h_k(z) := \frac{f^k(z) - z}{f^{-1}(z) - z}$$

$\square$

# Bew.(4): $\mathcal{J}(f)$ im Abschluss der abst., period. Punkte von $f$

**Beweis (Analyse von $\{h_k\}$).**

Sei $U := U(w)$ beliebig und offen mit $U \subset V$.

# Bew.(4): $\mathcal{J}(f)$ im Abschluss der abst., period. Punkte von $f$

**Beweis (Analyse von $\{h_k\}$).**

Sei $U := U(w)$ beliebig und offen mit $U \subset V$.
$w \in \mathcal{J}(f) \quad \Rightarrow \quad \{f^k\}$ nicht normal auf $U$

# Bew.(4): $\mathcal{J}(f)$ im Abschluss der abst., period. Punkte von $f$

**Beweis (Analyse von $\{h_k\}$).**

Sei $U := U(w)$ beliebig und offen mit $U \subset V$.

$w \in \mathcal{J}(f) \quad \Rightarrow \quad \{f^k\}$ nicht normal auf $U$

$\Longrightarrow \quad \{h_k\}$ nicht normal auf $U$

# Bew.(4): $\mathcal{J}(f)$ im Abschluss der abst., period. Punkte von $f$

- Erinnerung: $h_k(z) := \dfrac{f^k(z) - z}{f^{-1}(z) - z}$

**Beweis (Analyse von $\{h_k\}$).**

Sei $U := U(w)$ beliebig und offen mit $U \subset V$.

$w \in \mathcal{J}(f) \quad \Rightarrow \quad \{f^k\}$ nicht normal auf $U$

$\Longrightarrow \quad \{h_k\}$ nicht normal auf $U$

$\overset{\text{Satz v. Montel}}{\Longrightarrow} \exists k$ : entweder $h_k(z) = 0$ oder $h_k(z) = 1$ für ein $z \in U$

# Bew.(4): $\mathcal{J}(f)$ im Abschluss der abst., period. Punkte von $f$

- Erinnerung: $h_k(z) := \dfrac{f^k(z) - z}{f^{-1}(z) - z}$

**Beweis (Analyse von $\{h_k\}$).**

Sei $U := U(w)$ beliebig und offen mit $U \subset V$.
$w \in \mathcal{J}(f) \quad \Rightarrow \quad \{f^k\}$ nicht normal auf $U$
$\Longrightarrow \quad \{h_k\}$ nicht normal auf $U$
$\overset{\text{Satz v. Montel}}{\Longrightarrow}$ $\exists k$ : entweder $h_k(z) = 0$ oder $h_k(z) = 1$ für ein $z \in U$
2 Fälle:
1) $f^k(z) = z$ für ein $z \in U$

# Bew.(4): $\mathcal{J}(f)$ im Abschluss der abst., period. Punkte von $f$

- Erinnerung: $h_k(z) := \dfrac{f^k(z) - z}{f^{-1}(z) - z}$

**Beweis (Analyse von $\{h_k\}$).**

Sei $U := U(w)$ beliebig und offen mit $U \subset V$.

$w \in \mathcal{J}(f) \quad \Rightarrow \quad \{f^k\}$ nicht normal auf $U$

$\Longrightarrow \quad \{h_k\}$ nicht normal auf $U$

$\overset{\text{Satz v. Montel}}{\Longrightarrow} \quad \exists k$ : entweder $h_k(z) = 0$ oder $h_k(z) = 1$ für ein $z \in U$

2 Fälle:

1) $f^k(z) = z$ für ein $z \in U$

2) $f^k(z) = f^{-1}(z) \quad \Rightarrow \quad f^{k+1}(z) = z$ für ein $z \in U$

# Bew.(4): $\mathcal{J}(f)$ im Abschluss der abst., period. Punkte von $f$

- Erinnerung: $h_k(z) := \dfrac{f^k(z) - z}{f^{-1}(z) - z}$

**Beweis (Analyse von $\{h_k\}$).**

Sei $U := U(w)$ beliebig und offen mit $U \subset V$.
$w \in \mathcal{J}(f) \quad \Rightarrow \quad \{f^k\}$ nicht normal auf $U$
$\Longrightarrow \quad \{h_k\}$ nicht normal auf $U$
$\overset{\text{Satz v. Montel}}{\Longrightarrow} \quad \exists k :$ entweder $h_k(z) = 0$ oder $h_k(z) = 1$ für ein $z \in U$
2 Fälle:
1) $f^k(z) = z$ für ein $z \in U$
2) $f^k(z) = f^{-1}(z) \quad \Rightarrow \quad f^{k+1}(z) = z$ für ein $z \in U$
$\Longrightarrow \quad U$ enthält period. Punkt von $f$.

# Bew.(4): $\mathcal{J}(f)$ im Abschluss der abst., period. Punkte von $f$

- Erinnerung: $h_k(z) := \dfrac{f^k(z) - z}{f^{-1}(z) - z}$

**Beweis (Analyse von $\{h_k\}$).**

Sei $U := U(w)$ beliebig und offen mit $U \subset V$.
$w \in \mathcal{J}(f) \quad \Rightarrow \quad \{f^k\}$ nicht normal auf $U$
$\Longrightarrow \quad \{h_k\}$ nicht normal auf $U$
$\overset{\text{Satz v. Montel}}{\Longrightarrow} \quad \exists k$ : entweder $h_k(z) = 0$ oder $h_k(z) = 1$ für ein $z \in U$
2 Fälle:
1) $f^k(z) = z$ für ein $z \in U$
2) $f^k(z) = f^{-1}(z) \quad \Rightarrow \quad f^{k+1}(z) = z$ für ein $z \in U$
$\Longrightarrow \quad U$ enthält period. Punkt von $f$.
$\Longrightarrow \quad \forall w \in E : w \in \overline{\{z \in \mathbb{C} : z \text{ abst., period. Punkt von } f\}}$ $\square$

# Bew.(5): $\mathcal{J}(f)$ im Abschluss der abst., period. Punkte von $f$

**Beweis.**

$f$ Polynom $\quad\Rightarrow\quad$ $E$ enthält fast alles von $\mathcal{J}(f)$

# Bew.(5): $\mathcal{J}(f)$ im Abschluss der abst., period. Punkte von $f$

**Beweis.**

$f$ Polynom $\quad\Rightarrow\quad$ $E$ enthält fast alles von $\mathcal{J}(f)$

$\mathcal{J}(f)$ keine isolierten Punkte (perfekt)

# Bew.(5): $\mathcal{J}(f)$ im Abschluss der abst., period. Punkte von $f$

**Beweis.**

$f$ Polynom $\quad\Rightarrow\quad$ $E$ enthält fast alles von $\mathcal{J}(f)$
$\mathcal{J}(f)$ keine isolierten Punkte (perfekt)

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{J}(f) \subset \bar{E} \subset \overline{\{z \in \mathbb{C} : z \text{ abst., period. Punkt von } f\}}$$

# Bew.(5): $\mathcal{J}(f)$ im Abschluss der abst., period. Punkte von $f$

**Beweis.**

$f$ Polynom $\quad \Rightarrow \quad$ $E$ enthält fast alles von $\mathcal{J}(f)$

$\mathcal{J}(f)$ keine isolierten Punkte (perfekt)

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{J}(f) \subset \bar{E} \subset \overline{\{z \in \mathbb{C} : z \text{ abst., period. Punkt von } f\}}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{Behauptung}$$

□

# Anziehungsbereiche

**Definition (Anziehungsbereich)**

Wenn $w$ ein anziehender Fixpunkt ist, dann ist

$$A(w) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \xrightarrow{k \to \infty} w\}$$

der **Anziehungsbereich von w**. Diese Definition gilt genauso für $A(\infty)$.

# Anziehungsbereiche

## Definition (Anziehungsbereich)

Wenn $w$ ein anziehender Fixpunkt ist, dann ist

$$A(w) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} w\}$$

der **Anziehungsbereich von w**. Diese Definition gilt genauso für $A(\infty)$.

## Bemerkung (Anziehungsbereich offen)

- *$w$ anziehend $\Rightarrow$ $\exists V$ offen in $A(w)$ mit $w \in V$ $\Rightarrow$ $A(w)$ offen, weil: $f^k(z) \in V$ für ein $k \Longrightarrow z \in f^{-k}(V)$, welches offen ist.*
- *für $w = \infty$ wähle $\{z : |z| > r\}$ für ausreichend großes $r$*

# Julia-Menge als Rand der Anziehungsbereiche

**Lemma**

*Sei $w$ ein attraktiver Fixpunkt von $f$. Dann gilt: $\partial A(w) = \mathcal{J}(f)$. Das gilt auch, wenn $w = \infty$.*

kein Beweis. (aus Zeitgründen)

# Zusammenfassung: Eigenschaften von Julia-Mengen

Sei $\mathcal{J}(f)$ die Julia-Menge vom Polynom $f$, dann gilt:

- $\mathcal{J}(f) = \partial \left\{ z \in \mathbb{C} : f^k(z) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty \right\}$

# Zusammenfassung: Eigenschaften von Julia-Mengen

Sei $\mathcal{J}(f)$ die Julia-Menge vom Polynom $f$, dann gilt:

- $\mathcal{J}(f) = \partial \left\{ z \in \mathbb{C} : f^k(z) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty \right\}$
- $\mathcal{J}(f)$ ist eine nicht-abzählbare, nicht-leere, kompakte Menge, die keine isolierten Punkte enthält.

# Zusammenfassung: Eigenschaften von Julia-Mengen

Sei $\mathcal{J}(f)$ die Julia-Menge vom Polynom $f$, dann gilt:

- $\mathcal{J}(f) = \partial \left\{ z \in \mathbb{C} : f^k(z) \xrightarrow{k \to \infty} \infty \right\}$
- $\mathcal{J}(f)$ ist eine nicht-abzählbare, nicht-leere, kompakte Menge, die keine isolierten Punkte enthält.
- $\mathcal{J}(f)$ ist invariant unter $f$ und $f^{-1}$.

# Zusammenfassung: Eigenschaften von Julia-Mengen

Sei $\mathcal{J}(f)$ die Julia-Menge vom Polynom $f$, dann gilt:

- $\mathcal{J}(f) = \partial \left\{ z \in \mathbb{C} : f^k(z) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty \right\}$
- $\mathcal{J}(f)$ ist eine nicht-abzählbare, nicht-leere, kompakte Menge, die keine isolierten Punkte enthält.
- $\mathcal{J}(f)$ ist invariant unter $f$ und $f^{-1}$.
- $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(f^p)\ \forall p \in \mathbb{N}, p > 0$

# Zusammenfassung: Eigenschaften von Julia-Mengen

Sei $\mathcal{J}(f)$ die Julia-Menge vom Polynom $f$, dann gilt:

- $\mathcal{J}(f) = \partial \left\{ z \in \mathbb{C} : f^k(z) \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} \infty \right\}$
- $\mathcal{J}(f)$ ist eine nicht-abzählbare, nicht-leere, kompakte Menge, die keine isolierten Punkte enthält.
- $\mathcal{J}(f)$ ist invariant unter $f$ und $f^{-1}$.
- $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(f^p)\ \forall p \in \mathbb{N}, p > 0$
- $z \in \mathcal{J}(f) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{J}(f) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)}$

# Zusammenfassung: Eigenschaften von Julia-Mengen

Sei $\mathcal{J}(f)$ die Julia-Menge vom Polynom $f$, dann gilt:

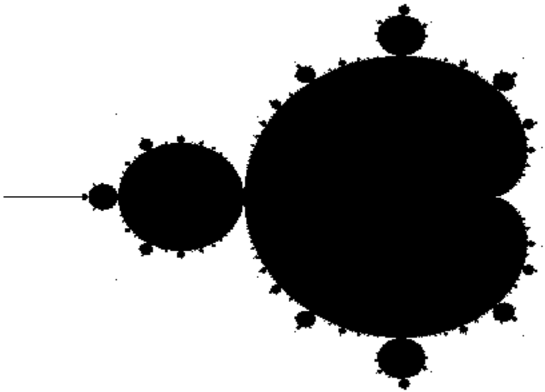
- $\mathcal{J}(f) = \partial \left\{ z \in \mathbb{C} : f^k(z) \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} \infty \right\}$
- $\mathcal{J}(f)$ ist eine nicht-abzählbare, nicht-leere, kompakte Menge, die keine isolierten Punkte enthält.
- $\mathcal{J}(f)$ ist invariant unter $f$ und $f^{-1}$.
- $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(f^p)\ \forall p \in \mathbb{N}, p > 0$
- $z \in \mathcal{J}(f) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{J}(f) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)}$
- $\mathcal{J}(f) = \partial A(w)\ \forall w$, $w$ anziehender Fixpunkt von $f$

# Zusammenfassung: Eigenschaften von Julia-Mengen

Sei $\mathcal{J}(f)$ die Julia-Menge vom Polynom $f$, dann gilt:

- $\mathcal{J}(f) = \partial \left\{ z \in \mathbb{C} : f^k(z) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty \right\}$
- $\mathcal{J}(f)$ ist eine nicht-abzählbare, nicht-leere, kompakte Menge, die keine isolierten Punkte enthält.
- $\mathcal{J}(f)$ ist invariant unter $f$ und $f^{-1}$.
- $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(f^p) \; \forall p \in \mathbb{N}, p > 0$
- $z \in \mathcal{J}(f) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{J}(f) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)}$
- $\mathcal{J}(f) = \partial A(w) \; \forall w$, $w$ anziehender Fixpunkt von $f$
- $\mathcal{J}(f)$ ist der Abschluss der abstoßenden periodischen Punkte von $f$.

# Quadratische Funktionen & die Mandelbrot-Menge



Demoprogramm starten

# Einschränkung?

- Untersuchung von $f_c(z) = z^2 + c$
- scheinbar starke Einschränkung

# Einschränkung?

- Untersuchung von $f_c(z) = z^2 + c$
- scheinbar starke Einschränkung
- Sei $h(z) = \alpha z + \beta$ $(\alpha \neq 0)$

# Einschränkung?

- Untersuchung von $f_c(z) = z^2 + c$
- scheinbar starke Einschränkung
- Sei $h(z) = \alpha z + \beta$ $(\alpha \neq 0)$

**Definition (Konjugation)**

Die Transformation $h$ wird **Konjugation zwischen f und $\mathbf{f_c}$** genannt.

# Einschränkung?

- Untersuchung von $f_c(z) = z^2 + c$
- scheinbar starke Einschränkung
- Sei $h(z) = \alpha z + \beta$ $(\alpha \neq 0)$

**Definition (Konjugation)**

Die Transformation $h$ wird **Konjugation zwischen f und $\mathbf{f_c}$** genannt.

- $\Rightarrow \; h^{-1}(f_c(h(z))) = \dfrac{\alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta z + \beta^2 + c - \beta}{\alpha}$

# Einschränkung?

- Untersuchung von $f_c(z) = z^2 + c$
- scheinbar starke Einschränkung
- Sei $h(z) = \alpha z + \beta$ $(\alpha \neq 0)$

**Definition (Konjugation)**

Die Transformation $h$ wird **Konjugation zwischen f und $\mathbf{f_c}$** genannt.

- $\Rightarrow \; h^{-1}(f_c(h(z))) = \dfrac{\alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta z + \beta^2 + c - \beta}{\alpha}$
- für jede quadr. Funktion: $\exists \alpha, \beta, c$

# Konjugation

- $f := h^{-1} \circ f_c \circ h \quad \Rightarrow \quad \forall k \; : \; f^k = h^{-1} \circ {f_c}^k \circ h$

# Konjugation

- $f := h^{-1} \circ f_c \circ h \quad \Rightarrow \quad \forall k \ : \ f^k = h^{-1} \circ {f_c}^k \circ h$
- $h$ transformiert das dynamische Bild von $f$ zu dem von $f_c$.
  Genauer: $\quad f^k(z) \to \infty \quad \Longleftrightarrow \quad {f_c}^k(z) \to \infty$

# Konjugation

- $f := h^{-1} \circ f_c \circ h \quad \Rightarrow \quad \forall k \ : \ f^k = h^{-1} \circ {f_c}^k \circ h$
- $h$ transformiert das dynamische Bild von $f$ zu dem von $f_c$.
  Genauer: $\quad f^k(z) \to \infty \quad \Longleftrightarrow \quad {f_c}^k(z) \to \infty$
  $\Longrightarrow \quad \mathcal{J}(f) = h^{-1}(\, \mathcal{J}(f_c)\,)$

# Konjugation

- $f := h^{-1} \circ f_c \circ h \quad \Rightarrow \quad \forall k \ : \ f^k = h^{-1} \circ {f_c}^k \circ h$
- $h$ transformiert das dynamische Bild von $f$ zu dem von $f_c$.
  Genauer: $\quad f^k(z) \to \infty \quad \Longleftrightarrow \quad {f_c}^k(z) \to \infty$
  $\Longrightarrow \quad \mathcal{J}(f) = h^{-1}(\,\mathcal{J}(f_c)\,)$

## Bemerkung (zur Konjugation)

- *jede quadratische Funktion konjugiert zu $f_c$*

# Konjugation

- $f := h^{-1} \circ f_c \circ h \quad \Rightarrow \quad \forall k \ : \ f^k = h^{-1} \circ {f_c}^k \circ h$
- $h$ transformiert das dynamische Bild von $f$ zu dem von $f_c$.
  Genauer: $f^k(z) \to \infty \quad \Longleftrightarrow \quad {f_c}^k(z) \to \infty$
  $\Longrightarrow \quad \mathcal{J}(f) = h^{-1}(\,\mathcal{J}(f_c)\,)$

**Bemerkung (zur Konjugation)**

- *jede quadratische Funktion konjugiert zu $f_c$*
- *Aussagen über $\mathcal{J}(f_c)$ auch für alle $\mathcal{J}(f)$, $f$ quadr. Polynom*

# Konjugation

- $f := h^{-1} \circ f_c \circ h \quad \Rightarrow \quad \forall k \ : \ f^k = h^{-1} \circ {f_c}^k \circ h$
- $h$ transformiert das dynamische Bild von $f$ zu dem von $f_c$.
  Genauer: $\quad f^k(z) \to \infty \quad \Longleftrightarrow \quad {f_c}^k(z) \to \infty$
  $\Longrightarrow \quad \mathcal{J}(f) = h^{-1}(\,\mathcal{J}(f_c)\,)$

**Bemerkung (zur Konjugation)**

- *jede quadratische Funktion konjugiert zu $f_c$*
- *Aussagen über $\mathcal{J}(f_c)$ auch für alle $\mathcal{J}(f)$, $f$ quadr. Polynom*
- *$h$ Ähnlichkeitstransformation $\Rightarrow \forall f \ \exists c \in \mathbb{C} : \mathcal{J}(f)$ geometrisch ähnlich zu $\mathcal{J}(f_c)$*

# Mandelbrot-Menge

**Definition (Mandelbrot-Menge)**

Die **Mandelbrot-Menge** $\mathcal{M}$ ist die Menge der Parameter $c$, für die die Julia-Menge von $f_c$ zusammenhängend ist.

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : \mathcal{J}(f_c) \text{ ist zusammenhängend } \}$$

# Zweige, Schleife

## Definition (Zweige)

${f_c}^{-1}(z) = \pm\sqrt{z-c}$ werden auch als **zwei Zweige von** $\mathbf{{f_c}^{-1}(z)}$ bezeichnet ($z \neq c$).

# Zweige, Schleife

## Definition (Zweige)

${f_c}^{-1}(z) = \pm\sqrt{z-c}$ werden auch als **zwei Zweige von $\mathbf{f_c}^{-1}(\mathbf{z})$** bezeichnet ($z \neq c$).

## Definition (Schleife)

Eine glatte (d.h. differenzierbare), geschlossene, einfache (d.h. sich nicht selber schneidende) Kurve in der komplexen Zahlenebene heißt **Schleife**.

# Zweige, Schleife

## Definition (Zweige)

${f_c}^{-1}(z) = \pm\sqrt{z-c}$ werden auch als **zwei Zweige von $\mathbf{{f_c}^{-1}(z)}$** bezeichnet ($z \neq c$).

## Definition (Schleife)

Eine glatte (d.h. differenzierbare), geschlossene, einfache (d.h. sich nicht selber schneidende) Kurve in der komplexen Zahlenebene heißt **Schleife**.
Die Teilmengen von $\mathbb{C}$ innerhalb bzw. außerhalb der Kurve heißen **Inneres** bzw. **Äußeres** der Schleife.

# Zweige, Schleife

## Definition (Zweige)

${f_c}^{-1}(z) = \pm\sqrt{z-c}$ werden auch als **zwei Zweige von $\mathbf{f_c}^{-1}\mathbf{(z)}$** bezeichnet ($z \neq c$).

## Definition (Schleife)

Eine glatte (d.h. differenzierbare), geschlossene, einfache (d.h. sich nicht selber schneidende) Kurve in der komplexen Zahlenebene heißt **Schleife**.
Die Teilmengen von $\mathbb{C}$ innerhalb bzw. außerhalb der Kurve heißen **Inneres** bzw. **Äußeres** der Schleife.
Eine glatte, geschlossene Kurve, die sich an einem einzigen Punkt selber schneidet, heißt **Achtschleife**.

# Abbildungseigenschaften von $f_c^{-1}$

## Lemma (Abbildungslemma)

*Sei $C$ eine Schleife in der komplexen Zahlenebene.*

(a) *Wenn $c$ innerhalb von $C$ ist, dann ist ${f_c}^{-1}(C)$ eine Schleife mit dem inversen Bild des Inneren von $C$ als Inneres von ${f_c}^{-1}(C)$.*

(b) *Wenn $c$ auf $C$ liegt, dann ist ${f_c}^{-1}(C)$ eine Achtschleife mit Schnittpunkt mit sich selbst in $0$, so dass das inverse Bild vom Inneren von $C$ das Innere der zwei Schleifen ist.*

(c) *Wenn $c$ außerhalb von $C$ ist, dann besteht ${f_c}^{-1}(C)$ aus zwei nicht zusammenhängenden Schleifen mit dem inversen Bild des Inneren von $C$ als Inneres der beiden Schleifen.*

## Beweis: Eigenschaften der Zweige.

${f_c}^{-1}(z) = \pm(z-c)^{\frac{1}{2}}$ und $\left({f_c}^{-1}\right)'(z) = \pm\frac{1}{2}(z-c)^{-\frac{1}{2}}$

## Beweis: Eigenschaften der Zweige.

${f_c}^{-1}(z) = \pm(z-c)^{\frac{1}{2}}$ und $\left({f_c}^{-1}\right)'(z) = \pm\frac{1}{2}(z-c)^{-\frac{1}{2}}$

Ableitung: endlich, nicht-null ($z \neq c$)

## Beweis: Eigenschaften der Zweige.

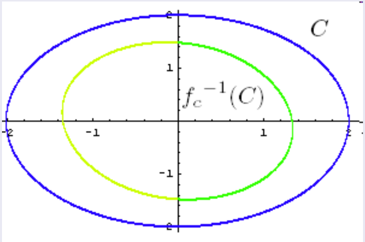
${f_c}^{-1}(z) = \pm(z-c)^{\frac{1}{2}}$ und $\left({f_c}^{-1}\right)'(z) = \pm\frac{1}{2}(z-c)^{-\frac{1}{2}}$

Ableitung: endlich, nicht-null ($z \neq c$)

Für jeden der Zweige ${f_c}^{-1}$ ist ${f_c}^{-1}(C)$ eine lokal, glatte Kurve. ($c \notin C$)

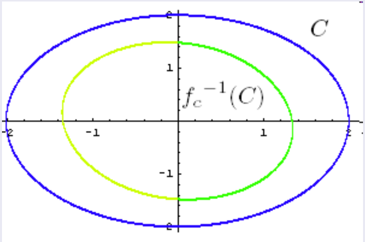
□

## Beweis (a).




Konstruktion des Urbilds aus beiden Zweigen $\Rightarrow$ $f_c{}^{-1}(C)$ glatte Kurve.

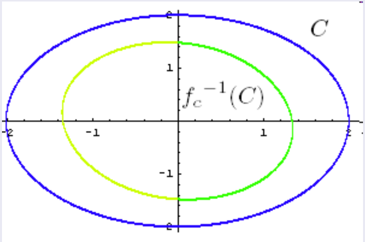
## Beweis (a).




Konstruktion des Urbilds aus beiden Zweigen $\Rightarrow$ $f_c{}^{-1}(C)$ glatte Kurve.

$c \notin C \quad \Rightarrow \quad 0 \notin f_c{}^{-1}(C)$

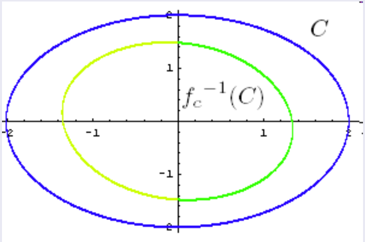
## Beweis (a).




Konstruktion des Urbilds aus beiden Zweigen $\Rightarrow$ $f_c{}^{-1}(C)$ glatte Kurve.

$c \notin C \quad \Rightarrow \quad 0 \notin f_c{}^{-1}(C) \quad \Rightarrow \quad f_c{}'(z) \neq 0$ auf $f_c{}^{-1}(C)$

## Beweis (a).

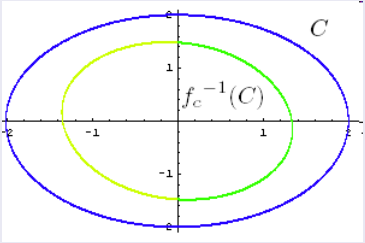



Konstruktion des Urbilds aus beiden Zweigen $\Rightarrow$ $f_c{}^{-1}(C)$ glatte Kurve.

$c \notin C \quad \Rightarrow \quad 0 \notin f_c{}^{-1}(C) \quad \Rightarrow \quad f_c'(z) \neq 0$ auf $f_c{}^{-1}(C)$

$\Rightarrow \quad f_c$ lokal eine glatte, bijektive Abb. nahe $f_c{}^{-1}(C)$

## Beweis (a).



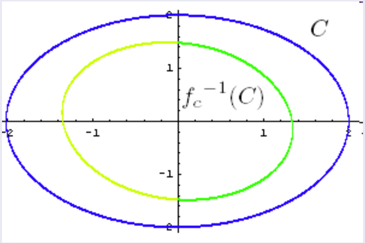

Konstruktion des Urbilds aus beiden Zweigen $\Rightarrow$ $f_c{}^{-1}(C)$ glatte Kurve.

$c \notin C \quad \Rightarrow \quad 0 \notin f_c{}^{-1}(C) \quad \Rightarrow \quad f_c'(z) \neq 0$ auf $f_c{}^{-1}(C)$

$\Rightarrow \quad f_c$ lokal eine glatte, bijektive Abb. nahe $f_c{}^{-1}(C)$

$z \in f_c{}^{-1}(C)$ kein Schnittpunkt von $f_c{}^{-1}(C)$ mit sich selbst,
sonst: $f_c(z)$ Schnittpunkt von $C$ mit sich selbst

## Beweis (a).




Konstruktion des Urbilds aus beiden Zweigen $\Rightarrow$ $f_c^{-1}(C)$ glatte Kurve.

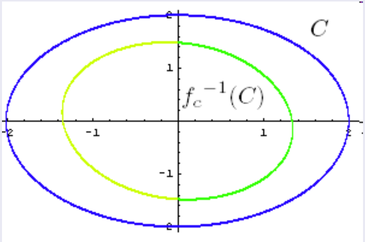
$c \notin C \quad \Rightarrow \quad 0 \notin f_c^{-1}(C) \quad \Rightarrow \quad f_c'(z) \neq 0$ auf $f_c^{-1}(C)$

$\Rightarrow \quad f_c$ lokal eine glatte, bijektive Abb. nahe $f_c^{-1}(C)$

$z \in f_c^{-1}(C)$ kein Schnittpunkt von $f_c^{-1}(C)$ mit sich selbst, sonst: $f_c(z)$ Schnittpunkt von $C$ mit sich selbst

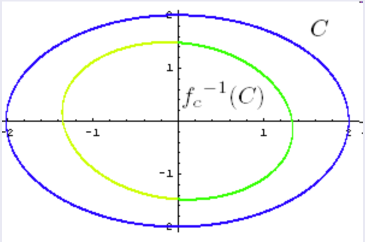
$\Rightarrow \quad f_c^{-1}(C)$ eine Schleife □

## Beweis (a). Fortsetzung.




$f_c$ stetig und nur $f_c^{-1}(C) \mapsto C$

## Beweis (a). Fortsetzung.

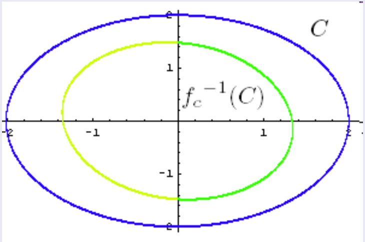



$f_c$ stetig und nur $f_c^{-1}(C) \mapsto C$

$\Rightarrow \quad f_c$ bildet ab:

- Inneres$(f_c^{-1}(C)) \mapsto$ Inneres$(C)$
- Äußeres$(f_c^{-1}(C)) \mapsto$ Äußeres$(C)$

## Beweis (a). Fortsetzung.



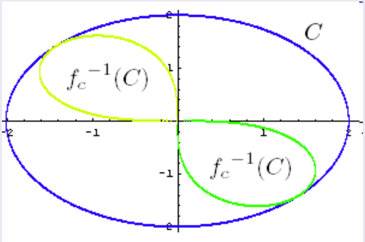

$f_c$ stetig und nur $f_c^{-1}(C) \mapsto C$

$\Rightarrow$ $f_c$ bildet ab:

- $\text{Inneres}(f_c^{-1}(C)) \mapsto \text{Inneres}(C)$
- $\text{Äußeres}(f_c^{-1}(C)) \mapsto \text{Äußeres}(C)$

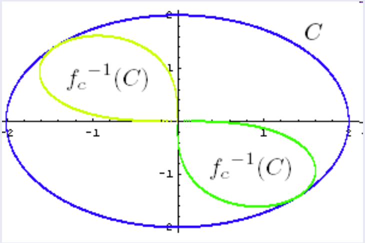
$\Rightarrow$ $f_c^{-1}$: $\text{Inneres}(C) \mapsto \text{Inneres}(f_c^{-1}(C))$ $\square$

## Beweis (b).




Beweis gleich zu (a).

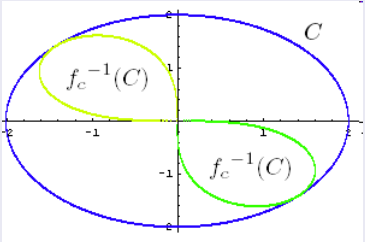
## Beweis (b).




Beweis gleich zu (a).

Sei $C_0$ Stück einer glatten Kurve, $c \in C_0$

## Beweis (b).

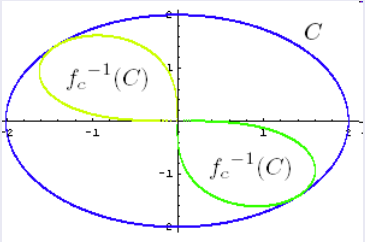



Beweis gleich zu (a).

Sei $C_0$ Stück einer glatten Kurve, $c \in C_0$

$\Rightarrow$ $f_c^{-1}(C_0)$ besteht aus 2 glatten Stücken von Kurven durch 0 schneiden sich im 90°-Winkel

## Beweis (b).



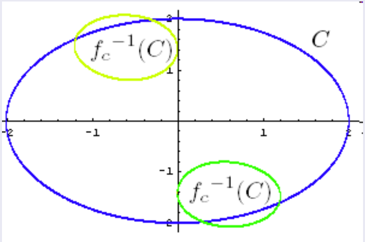

Beweis gleich zu (a).

Sei $C_0$ Stück einer glatten Kurve, $c \in C_0$

$\Rightarrow$ $f_c^{-1}(C_0)$ besteht aus 2 glatten Stücken von Kurven durch 0 schneiden sich im 90°-Winkel

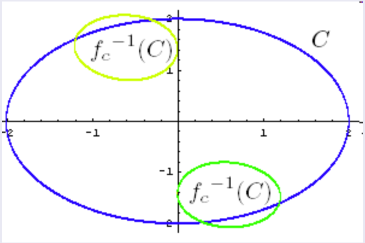
$\Rightarrow$ Schnittpunkt der Achtschleife $\square$

## Beweis (c).



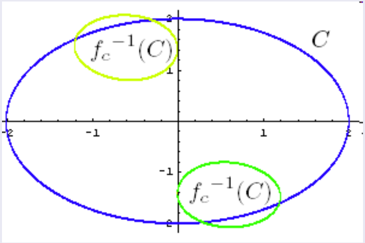

Beweis gleich zu (a).

## Beweis (c).




Beweis gleich zu (a).
$f_c^{-1}(z)$ kann nur einen der Werte annehmen, für $z \in C$

## Beweis (c).




Beweis gleich zu (a).
$f_c{}^{-1}(z)$ kann nur einen der Werte annehmen, für $z \in C$
$\Rightarrow$ 2 Schleifen. $\square$

# Fundamentaler Satz der Mandelbrot-Menge

**Satz (Fundamentaler Satz der Mandelbrot-Menge)**

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : \{{f_c}^k(0)\}_{k\geq 1} \textit{ ist beschränkt}\} \tag{1}$$

$$= \{c \in \mathbb{C} : {f_c}^k(0) \nrightarrow \infty \; (k \to \infty)\} \tag{2}$$

# Fundamentaler Satz der Mandelbrot-Menge

**Satz (Fundamentaler Satz der Mandelbrot-Menge)**

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : \{{f_c}^k(0)\}_{k \geq 1} \textit{ ist beschränkt}\} \tag{1}$$

$$= \{c \in \mathbb{C} : {f_c}^k(0) \nrightarrow \infty \ (k \to \infty)\} \tag{2}$$

**Beweis(1): Gleichheit (1) & (2).**

Divergenzlemma: ${f_c}^k(0) \nrightarrow \infty \iff \{{f_c}^k(0)\}$ ist beschränkt

# Fundamentaler Satz der Mandelbrot-Menge

## Satz (Fundamentaler Satz der Mandelbrot-Menge)

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{c \in \mathbb{C} : \{{f_c}^k(0)\}_{k\geq 1} \textit{ ist beschränkt}\} && (1) \\ &= \{c \in \mathbb{C} : {f_c}^k(0) \nrightarrow \infty \ (k \to \infty)\} && (2) \end{aligned}$$

## Beweis(1): Gleichheit (1) & (2).

Divergenzlemma: ${f_c}^k(0) \nrightarrow \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \{{f_c}^k(0)\}$ ist beschränkt

$\Rightarrow$ (1) und (2) gleich.

# Fundamentaler Satz der Mandelbrot-Menge

**Satz (Fundamentaler Satz der Mandelbrot-Menge)**

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{c \in \mathbb{C} : \{f_c{}^k(0)\}_{k \geq 1} \textit{ ist beschränkt}\} && (1) \\ &= \{c \in \mathbb{C} : f_c{}^k(0) \nrightarrow \infty \ (k \to \infty)\} && (2) \end{aligned}$$

**Beweis(1): Gleichheit (1) & (2).**

Divergenzlemma: $f_c{}^k(0) \nrightarrow \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \{f_c{}^k(0)\}$ ist beschränkt
$\Rightarrow$ (1) und (2) gleich.

zwei Schritte:

(a) $\{f_c{}^k(0)\}$ beschränkt $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$ zusammenhängend
(b) $\{f_c{}^k(0)\}$ unbeschränkt $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$ nicht zusammenhängend

□

## Beweis(2): $\{{f_c}^k(0)\}$ beschränkt $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$ zusammenhängend.

$\prec \ldots$ innerhalb, $\succ \ldots$ außerhalb

## Beweis(2): $\{{f_c}^k(0)\}$ beschränkt $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$ zusammenhängend.

$\prec \ldots$ innerhalb, $\succ \ldots$ außerhalb

Sei $C$ großer Kreis mit: $\{{f_c}^k(0)\} \prec C$, ${f_c}^{-1}(C) \prec C$ und

$\forall z \succ C \Rightarrow {f_c}^k(z) \to \infty$.

## Beweis(2): $\{{f_c}^k(0)\}$ beschränkt $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$ zusammenhängend.

$\prec$... innerhalb, $\succ$... außerhalb

Sei $C$ großer Kreis mit: $\{{f_c}^k(0)\} \prec C$, ${f_c}^{-1}(C) \prec C$ und

$\forall z \succ C \;\Rightarrow\; {f_c}^k(z) \to \infty$.

$c = f_c(0) \prec C \overset{\text{Abb.lemma}}{\Longrightarrow}$ Schleife ${f_c}^{-1}(C) \prec C$

## Beweis(2): $\{f_c{}^k(0)\}$ beschränkt $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$ zusammenhängend.

$\prec \ldots$ innerhalb, $\succ \ldots$ außerhalb

Sei $C$ großer Kreis mit: $\{f_c{}^k(0)\} \prec C$, $f_c{}^{-1}(C) \prec C$ und $\forall z \succ C \; \Rightarrow \; f_c{}^k(z) \to \infty$.

$c = f_c(0) \prec C \overset{\text{Abb.lemma}}{\Longrightarrow}$ Schleife $f_c{}^{-1}(C) \prec C$

also auch: $f_c(c) = f_c{}^2(0) \prec C$

und $f_c{}^{-1}$ : $\ddot{A}u\beta ere(C) \mapsto \ddot{A}u\beta ere(f_c{}^{-1}(C))$.

## Beweis(2): $\{f_c{}^k(0)\}$ beschränkt $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$ zusammenhängend.

$\prec \ldots$ innerhalb, $\succ \ldots$ außerhalb
Sei $C$ großer Kreis mit: $\{f_c{}^k(0)\} \prec C$, $f_c{}^{-1}(C) \prec C$ und
$\forall z \succ C \;\Rightarrow\; f_c{}^k(z) \to \infty$.

$c = f_c(0) \prec C \stackrel{\text{Abb.lemma}}{\Longrightarrow}$ Schleife $f_c{}^{-1}(C) \prec C$

also auch: $f_c(c) = f_c{}^2(0) \prec C$
und $f_c{}^{-1}$ : $\ddot{A}u\beta ere(C) \mapsto \ddot{A}u\beta ere(f_c{}^{-1}(C))$.

$\Rightarrow\; c \prec f_c{}^{-1}(C)$.

## Beweis(2): $\{{f_c}^k(0)\}$ beschränkt $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$ zusammenhängend.

$\prec \ldots$ innerhalb, $\succ \ldots$ außerhalb
Sei $C$ großer Kreis mit: $\{{f_c}^k(0)\} \prec C$, ${f_c}^{-1}(C) \prec C$ und
$\forall z \succ C \ \Rightarrow \ {f_c}^k(z) \to \infty$.

$c = f_c(0) \prec C \overset{\text{Abb.lemma}}{\Longrightarrow}$ Schleife ${f_c}^{-1}(C) \prec C$

also auch: $f_c(c) = {f_c}^2(0) \prec C$
und ${f_c}^{-1} : \ddot{A}u\beta ere(C) \mapsto \ddot{A}u\beta ere({f_c}^{-1}(C))$.

$\Rightarrow \ c \prec {f_c}^{-1}(C)$.

Nochmal Abb.Lemma: Schleife ${f_c}^{-2}(C) \prec {f_c}^{-1}(C)$. usw.

## Beweis(2): $\{{f_c}^k(0)\}$ beschränkt $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$ zusammenhängend.

$\prec \ldots$ innerhalb, $\succ \ldots$ außerhalb
Sei $C$ großer Kreis mit: $\{{f_c}^k(0)\} \prec C$, ${f_c}^{-1}(C) \prec C$ und
$\forall z \succ C \;\Rightarrow\; {f_c}^k(z) \to \infty$.

$c = f_c(0) \prec C \overset{\text{Abb.lemma}}{\Longrightarrow}$ Schleife ${f_c}^{-1}(C) \prec C$

also auch: $f_c(c) = {f_c}^2(0) \prec C$
und ${f_c}^{-1} : \ddot{A}u\beta ere(C) \mapsto \ddot{A}u\beta ere({f_c}^{-1}(C))$.

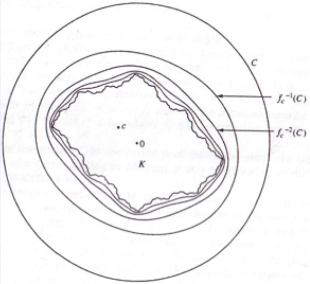
$\Rightarrow\; c \prec {f_c}^{-1}(C)$.

Nochmal Abb.Lemma: Schleife ${f_c}^{-2}(C) \prec {f_c}^{-1}(C)$. usw.

$\Rightarrow$ $\{{f_c}^{-k}(C)\}$ Folge von ineinander geschachtelten Schleifen.

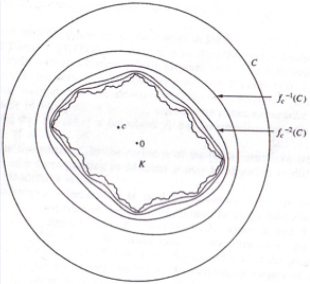
$\square$

## Beweis(3): $\{f_c{}^k(0)\}$ beschränkt $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$ zusammenhängend.



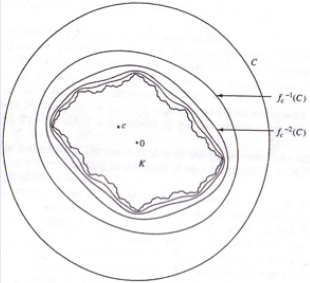

Sei $K$ abgeschlossene Menge der Punkte auf oder innerhalb der Schleifen $\{f_c{}^{-k}(C)\}$ $\forall k$.

## Beweis(3): $\{f_c{}^k(0)\}$ beschränkt $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$ zusammenhängend.




Sei $K$ abgeschlossene Menge der Punkte auf oder innerhalb der Schleifen $\{f_c{}^{-k}(C)\}\ \forall k$.
$z \in \mathbb{C} \setminus K$ mit $f_c{}^k(z) \succ C \quad \Rightarrow \quad f_c{}^k(z) \to \infty$

## Beweis(3): $\{{f_c}^k(0)\}$ beschränkt $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$ zusammenhängend.

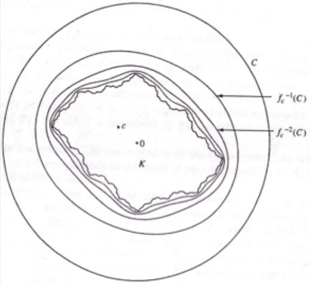



Sei $K$ abgeschlossene Menge der Punkte auf oder innerhalb der Schleifen $\{{f_c}^{-k}(C)\}\ \forall k$.

$z \in \mathbb{C} \setminus K$ mit ${f_c}^k(z) \succ C \quad \Rightarrow \quad {f_c}^k(z) \to \infty$

$\Rightarrow \quad A(\infty) = \{z : {f_c}^k(z) \to \infty\} = \mathbb{C} \setminus K$

## Beweis(3): $\{{f_c}^k(0)\}$ beschränkt $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$ zusammenhängend.

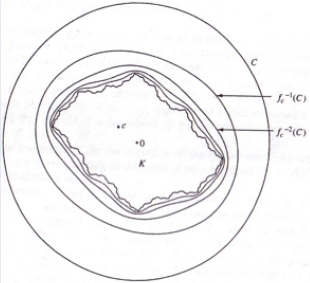



Sei $K$ abgeschlossene Menge der Punkte auf oder innerhalb der Schleifen $\{{f_c}^{-k}(C)\}\ \forall k$.

$z \in \mathbb{C} \setminus K$ mit ${f_c}^k(z) \succ C \quad \Rightarrow \quad {f_c}^k(z) \to \infty$

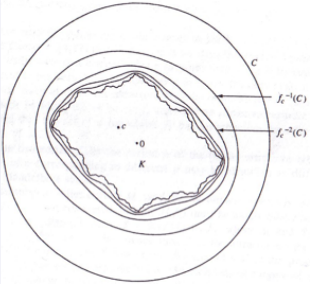
$\Rightarrow \quad A(\infty) = \{z : {f_c}^k(z) \to \infty\} = \mathbb{C} \setminus K \quad \Rightarrow \quad K = \mathcal{K}(f_c)$

## Beweis(3): $\{f_c{}^k(0)\}$ beschränkt $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$ zusammenhängend.




Sei $K$ abgeschlossene Menge der Punkte auf oder innerhalb der Schleifen $\{f_c{}^{-k}(C)\}\ \forall k$.
$z \in \mathbb{C} \setminus K$ mit $f_c{}^k(z) \succ C \quad \Rightarrow \quad f_c{}^k(z) \to \infty$
$\Rightarrow \quad A(\infty) = \{z : f_c{}^k(z) \to \infty\} = \mathbb{C} \setminus K \quad \Rightarrow \quad K = \mathcal{K}(f_c)$
Lemma Anz.breiche: $\mathcal{J}(f_c) = \partial(\mathbb{C} \setminus K) = \partial K$ - $K$ Schnitt zshgd. Mengen

## Beweis(3): $\{f_c{}^k(0)\}$ beschränkt $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$ zusammenhängend.




Sei $K$ abgeschlossene Menge der Punkte auf oder innerhalb der Schleifen $\{f_c{}^{-k}(C)\}\ \forall k$.

$z \in \mathbb{C} \setminus K$ mit $f_c{}^k(z) \succ C \quad \Rightarrow \quad f_c{}^k(z) \to \infty$

$\Rightarrow \quad A(\infty) = \{z : f_c{}^k(z) \to \infty\} = \mathbb{C} \setminus K \quad \Rightarrow \quad K = \mathcal{K}(f_c)$

Lemma Anz.breiche: $\mathcal{J}(f_c) = \partial(\mathbb{C} \setminus K) = \partial K$ - $K$ Schnitt zshgd. Mengen

$\Rightarrow \quad K$ zshgd. $\quad \Rightarrow \quad \mathcal{J}(f_c)$ zshgd. $\square$

## Beweis(4): $\{{f_c}^k(0)\}$ unbeschränkt $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$ nicht zusammenhängend.

Sei $C$ großer Kreis mit: ${f_c}^{-1}(C) \prec C$ und $\forall z \succ C \;\Rightarrow\; {f_c}^k(z) \to \infty$.

## Beweis(4): $\{{f_c}^k(0)\}$ unbeschränkt $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$ nicht zusammenhängend.

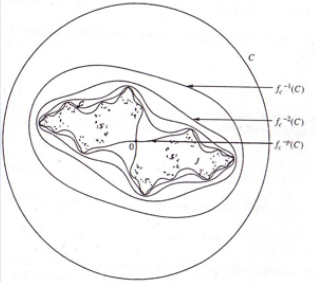
Sei $C$ großer Kreis mit: ${f_c}^{-1}(C) \prec C$ und $\forall z \succ C \Rightarrow {f_c}^k(z) \to \infty$.
Außerdem gelte: $\exists p : {f_c}^{p-1}(c) = {f_c}^p(0) \in C$ mit:

- ${f_c}^k(0) \prec C \ , \ k < p$
- ${f_c}^k(0) \succ C \ , \ k > p$

## Beweis(4): $\{{f_c}^k(0)\}$ unbeschränkt $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$ nicht zusammenhängend.

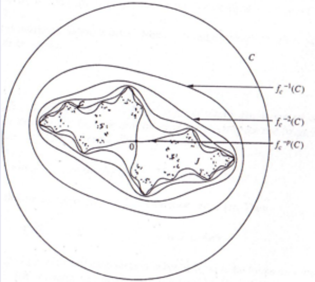
Sei $C$ großer Kreis mit: ${f_c}^{-1}(C) \prec C$ und $\forall z \succ C \;\Rightarrow\; {f_c}^k(z) \to \infty$.
Außerdem gelte: $\exists p : {f_c}^{p-1}(c) = {f_c}^p(0) \in C$ mit:

- ${f_c}^k(0) \prec C \;,\; k < p$
- ${f_c}^k(0) \succ C \;,\; k > p$



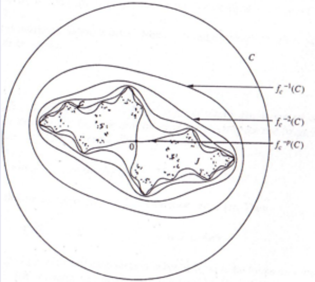

Sei ${f_c}^{-k}(C)$ Folge von ineinander liegenden Schleifen. $\square$

## Beweis(5): $\{f_c{}^k(0)\}$ unbeschränkt $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$ nicht zusammenhängend.



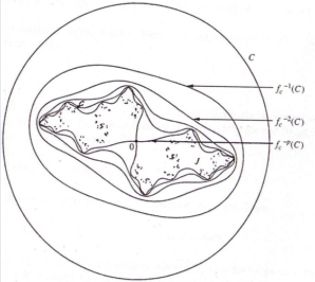

Bei $f_c{}^{1-p}(C)$ gilt $c \in f_c{}^{1-p}(C)$.

## Beweis(5): $\{f_c{}^k(0)\}$ unbeschränkt $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$ nicht zusammenhängend.



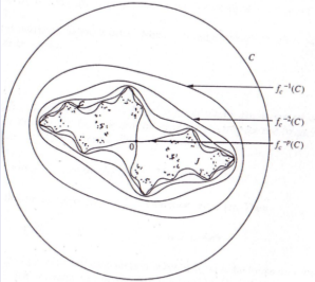

Bei $f_c{}^{1-p}(C)$ gilt $c \in f_c{}^{1-p}(C)$. $\Rightarrow$ Abb.Lemma (a) gilt nicht mehr.

## Beweis(5): $\{{f_c}^k(0)\}$ unbeschränkt $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$ nicht zusammenhängend.



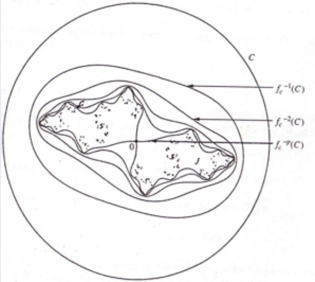

Bei ${f_c}^{1-p}(C)$ gilt $c \in {f_c}^{1-p}(C)$. $\Rightarrow$ Abb.Lemma (a) gilt nicht mehr.
Abb.Lemma (b): $E \equiv {f_c}^{-p}(C)$ Achtschleife innerhalb Schleife ${f_c}^{1-p}(C)$.

## Beweis(5): $\{{f_c}^k(0)\}$ unbeschränkt $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$ nicht zusammenhängend.



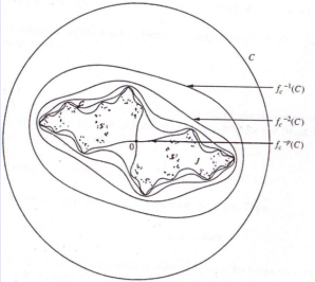

Bei ${f_c}^{1-p}(C)$ gilt $c \in {f_c}^{1-p}(C)$. $\Rightarrow$ Abb.Lemma (a) gilt nicht mehr.
Abb.Lemma (b): $E \equiv {f_c}^{-p}(C)$ Achtschleife innerhalb Schleife ${f_c}^{1-p}(C)$.
$\mathcal{J}(f_c)$ muss im Inneren der beiden Schleifen von $E$ liegen, da alle andern Punkte gegen $\infty$.

## Beweis(5): $\{{f_c}^k(0)\}$ unbeschränkt $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$ nicht zusammenhängend.




Bei ${f_c}^{1-p}(C)$ gilt $c \in {f_c}^{1-p}(C)$. $\Rightarrow$ Abb.Lemma (a) gilt nicht mehr.
Abb.Lemma (b): $E \equiv {f_c}^{-p}(C)$ Achtschleife innerhalb Schleife ${f_c}^{1-p}(C)$.
$\mathcal{J}(f_c)$ muss im Inneren der beiden Schleifen von $E$ liegen, da alle andern Punkte gegen $\infty$.
Invarianzsatz: Teile von $\mathcal{J}(f_c)$ in jeder der Schleifen von $E$.

## Beweis(5): $\{{f_c}^k(0)\}$ unbeschränkt $\Rightarrow \mathcal{J}(f_c)$ nicht zusammenhängend.




Bei ${f_c}^{1-p}(C)$ gilt $c \in {f_c}^{1-p}(C)$. $\Rightarrow$ Abb.Lemma (a) gilt nicht mehr.
Abb.Lemma (b): $E \equiv {f_c}^{-p}(C)$ Achtschleife innerhalb Schleife ${f_c}^{1-p}(C)$.
$\mathcal{J}(f_c)$ muss im Inneren der beiden Schleifen von $E$ liegen, da alle andern Punkte gegen $\infty$.
Invarianzsatz: Teile von $\mathcal{J}(f_c)$ in jeder der Schleifen von $E$.
Abb.Lemma (c): $\mathcal{J}(f_c)$ völlig unzusammenhängend. □

# Julia-Mengen von quadratischen Funktionen

- Untersuchung der Änderung der Struktur der Julia-Menge $\mathcal{J}(f_c)$, wenn $c$ variiert

# Julia-Mengen von quadratischen Funktionen

- Untersuchung der Änderung der Struktur der Julia-Menge $\mathcal{J}(f_c)$, wenn $c$ variiert
- anziehende, periodische Punkt von $f_c$ bedeutend für Form von $\mathcal{J}(f_c)$

# Julia-Mengen von quadratischen Funktionen

- Untersuchung der Änderung der Struktur der Julia-Menge $\mathcal{J}(f_c)$, wenn $c$ variiert
- anziehende, periodische Punkt von $f_c$ bedeutend für Form von $\mathcal{J}(f_c)$
- Es kann gezeigt werden, dass $f_c$ maximal einen anziehenden, periodischen Orbit hat.
  Idee: $w \neq \infty$ anziehender, periodischer Punkt von Polynom $f$ $\Longrightarrow \exists z : f'(z) = 0$, so dass $f^k(z)$ vom periodischen Orbit angezogen wird, das $w$ enthält. Der einzige kritische Punkt von $f_c$ ist 0.

# Julia-Mengen von quadratischen Funktionen

- Untersuchung der Änderung der Struktur der Julia-Menge $\mathcal{J}(f_c)$, wenn $c$ variiert
- anziehende, periodische Punkt von $f_c$ bedeutend für Form von $\mathcal{J}(f_c)$
- Es kann gezeigt werden, dass $f_c$ maximal einen anziehenden, periodischen Orbit hat.
  Idee: $w \neq \infty$ anziehender, periodischer Punkt von Polynom $f$ $\Longrightarrow \exists z : f'(z) = 0$, so dass $f^k(z)$ vom periodischen Orbit angezogen wird, das $w$ enthält. Der einzige kritische Punkt von $f_c$ ist 0.
- Wenn $c \notin \mathcal{M}$, dann folgt mit dem Fundamentalen Satz der Mandelbrot-Menge $f_c{}^k(0) \to \infty$, so dass $f_c$ keinen anziehenden, periodischen Orbit haben kann.

# Julia-Mengen von quadratischen Funktionen (2)

- Vermutung: Menge von $c$'s, für die $f_c$ einen anziehenden, periodischen Orbit hat, füllt das Innere von $\mathcal{M}$.

# Julia-Mengen von quadratischen Funktionen (2)

- Vermutung: Menge von $c$'s, für die $f_c$ einen anziehenden, periodischen Orbit hat, füllt das Innere von $\mathcal{M}$.
- Kategorisierung von $f_c$ nach der Periode $p$ des (endlichen) anziehenden Orbits, falls existent

# Julia-Mengen von quadratischen Funktionen (2)

- Vermutung: Menge von $c$'s, für die $f_c$ einen anziehenden, periodischen Orbit hat, füllt das Innere von $\mathcal{M}$.
- Kategorisierung von $f_c$ nach der Periode $p$ des (endlichen) anziehenden Orbits, falls existent
- Die Werte von $c$, die zu verschiedenen $p$ gehören, können als verschiedene Regionen der Mandelbrot-Menge $\mathcal{M}$ identifiziert werden.

# unzusammenhängende Julia-Mengen

**Satz (unzusammenhängende Julia-Mengen)**

*Angenommen* $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6}) \approx 2,475$. *Dann ist* $\mathcal{J}(f_c)$ *total unzusammenhängend und ist Attraktor (im Sinne wie im Vorgängervortrag verwendet) der Kontraktionen, die durch die zwei Zweige von* $f_c^{-1}(z) = \pm(z-c)^{\frac{1}{2}}$ *für* $z$ *nahe* $J$ *gegeben sind. Wenn* $|c|$ *groß ist, gilt:*

$$\dim_{\mathrm{B}} \mathcal{J}(f_c) = \dim_{\mathrm{H}} \mathcal{J}(f_c) \simeq \frac{2\log 2}{\log 4|c|}$$

ohne Beweis.

# einfache, geschlossene Kurve

**Satz (einfache, geschlossene Kurve)**

*Wenn $|c| < \frac{1}{4}$, dann ist $\mathcal{J}(f_c)$ eine einfache, geschlossene Kurve. (Eine Kurve ist einfach, wenn sie keine Schnittpunkte mit sich selbst hat.)*

ohne Beweis.

# einfache, geschlossene Kurve

**Satz (einfache, geschlossene Kurve)**

*Wenn $|c| < \frac{1}{4}$, dann ist $\mathcal{J}(f_c)$ eine einfache, geschlossene Kurve. (Eine Kurve ist einfach, wenn sie keine Schnittpunkte mit sich selbst hat.)*

ohne Beweis.

**Bemerkung (Dimensionsschätzung)**

*Es kann gezeigt werden, dass für kleine $|c|$, die Dimension durch folgenden Ausdruck abgeschätzt werden kann:*

$$s = \dim_{\mathrm{B}} \mathcal{J}(f_c) = \dim_{\mathrm{H}} \mathcal{J}(f_c)$$

$$s = 1 + \frac{|c|^2}{4 \log 2} + \textit{ Terme mit } |c|^3 \textit{ und höheren Exponenten}$$

# Computer-generierte Bilder

- Bilder von Julia-Mengen. Zwei Darstellungsmöglichkeiten:
    1. farbige Darstellung
    2. Darstellung des Rands
- Bild der Mandelbrot-Menge

# farbige Darstellung

- $c \in \mathbb{C}$ und maximale Anzahl an Iterationen $\hat{k}$ gegeben
- Bildfläche besteht aus Pixeln, über die ein geeigneter Ausschnitt der komplexen Zahlenebene gelegt wird.

# farbige Darstellung

- $c \in \mathbb{C}$ und maximale Anzahl an Iterationen $\hat{k}$ gegeben
- Bildfläche besteht aus Pixeln, über die ein geeigneter Ausschnitt der komplexen Zahlenebene gelegt wird.
- Bildgenerierung - Für jeden Pixel der Bildfläche:
    1. Komplexe Darstellung berechnen $=: z$

# farbige Darstellung

- $c \in \mathbb{C}$ und maximale Anzahl an Iterationen $\hat{k}$ gegeben
- Bildfläche besteht aus Pixeln, über die ein geeigneter Ausschnitt der komplexen Zahlenebene gelegt wird.
- Bildgenerierung - Für jeden Pixel der Bildfläche:
  1. Komplexe Darstellung berechnen $=: z$
  2. Iteration von ${f_c}^k(z)$ berechnen

# farbige Darstellung

- $c \in \mathbb{C}$ und maximale Anzahl an Iterationen $\hat{k}$ gegeben
- Bildfläche besteht aus Pixeln, über die ein geeigneter Ausschnitt der komplexen Zahlenebene gelegt wird.
- Bildgenerierung - Für jeden Pixel der Bildfläche:
    1. Komplexe Darstellung berechnen $=: z$
    2. Iteration von ${f_c}^k(z)$ berechnen
    3. Per Divergenzlemma entscheiden, ob Folge für $z$ divergent ist.

# farbige Darstellung

- $c \in \mathbb{C}$ und maximale Anzahl an Iterationen $\hat{k}$ gegeben
- Bildfläche besteht aus Pixeln, über die ein geeigneter Ausschnitt der komplexen Zahlenebene gelegt wird.
- Bildgenerierung - Für jeden Pixel der Bildfläche:
  1. Komplexe Darstellung berechnen $=: z$
  2. Iteration von ${f_c}^k(z)$ berechnen
  3. Per Divergenzlemma entscheiden, ob Folge für $z$ divergent ist.
  4. Pixel abhängig von der Anzahl der Iterationen bis zur Feststellung der Divergenz einfärben

# farbige Darstellung

- $c \in \mathbb{C}$ und maximale Anzahl an Iterationen $\hat{k}$ gegeben
- Bildfläche besteht aus Pixeln, über die ein geeigneter Ausschnitt der komplexen Zahlenebene gelegt wird.
- Bildgenerierung - Für jeden Pixel der Bildfläche:
  1. Komplexe Darstellung berechnen $=: z$
  2. Iteration von ${f_c}^k(z)$ berechnen
  3. Per Divergenzlemma entscheiden, ob Folge für $z$ divergent ist.
  4. Pixel abhängig von der Anzahl der Iterationen bis zur Feststellung der Divergenz einfärben
  5. Falls $k = \hat{k}$, dann $z \in \mathcal{K}(f_c)$. $\Rightarrow$ Pixel Schwarz färben.

# farbige Darstellung

- $c \in \mathbb{C}$ und maximale Anzahl an Iterationen $\hat{k}$ gegeben
- Bildfläche besteht aus Pixeln, über die ein geeigneter Ausschnitt der komplexen Zahlenebene gelegt wird.
- Bildgenerierung - Für jeden Pixel der Bildfläche:
  1. Komplexe Darstellung berechnen $=: z$
  2. Iteration von ${f_c}^k(z)$ berechnen
  3. Per Divergenzlemma entscheiden, ob Folge für $z$ divergent ist.
  4. Pixel abhängig von der Anzahl der Iterationen bis zur Feststellung der Divergenz einfärben
  5. Falls $k = \hat{k}$, dann $z \in \mathcal{K}(f_c)$. $\Rightarrow$ Pixel Schwarz färben.
- Anwendung des Divergenzlemma: Test ${f_c}^k(z) \geq \max\{|z|, 2\}$

# Darstellung des Randes

- $c \in \mathbb{C}$ und maximale Anzahl an Randpunkten $\hat{n}$ gegeben.

# Darstellung des Randes

- $c \in \mathbb{C}$ und maximale Anzahl an Randpunkten $\hat{n}$ gegeben.
- abstoßenden Fixpunkt berechnen: $z = f_c(z)$

# Darstellung des Randes

- $c \in \mathbb{C}$ und maximale Anzahl an Randpunkten $\hat{n}$ gegeben.
- abstoßenden Fixpunkt berechnen: $z = f_c(z)$
  $\Rightarrow\ z^2 - z + c = 0\ \Rightarrow\ z_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$

# Darstellung des Randes

- $c \in \mathbb{C}$ und maximale Anzahl an Randpunkten $\hat{n}$ gegeben.
- abstoßenden Fixpunkt berechnen: $z = f_c(z)$
  $\Rightarrow \; z^2 - z + c = 0 \; \Rightarrow \; z_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$
- abstoßender Fixpunkt $\in \mathcal{J}(f_c) \;\Rightarrow\;$ über Generierungslemma $\hat{n}$ Punkte berechnen: $f_c{}^{-1}(z) = \sqrt{z-c}$

# Darstellung des Randes

- $c \in \mathbb{C}$ und maximale Anzahl an Randpunkten $\hat{n}$ gegeben.
- abstoßenden Fixpunkt berechnen: $z = f_c(z)$
  $\Rightarrow \; z^2 - z + c = 0 \; \Rightarrow \; z_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$
- abstoßender Fixpunkt $\in \mathcal{J}(f_c) \; \Rightarrow$ über Generierungslemma $\hat{n}$ Punkte berechnen: ${f_c}^{-1}(z) = \sqrt{z-c}$
  $\Rightarrow \; z_{2n} := {f_c}^{-1}(z_n)$ und $z_{2n+1} := -{f_c}^{-1}(z_n)$ $\quad z_1$ abst. Fixpunkt

# Darstellung des Randes

- $c \in \mathbb{C}$ und maximale Anzahl an Randpunkten $\hat{n}$ gegeben.
- abstoßenden Fixpunkt berechnen: $z = f_c(z)$
  $\Rightarrow \; z^2 - z + c = 0 \; \Rightarrow \; z_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$
- abstoßender Fixpunkt $\in \mathcal{J}(f_c) \;\Rightarrow\;$ über Generierungslemma $\hat{n}$ Punkte berechnen: $f_c^{-1}(z) = \sqrt{z - c}$
  $\Rightarrow \; z_{2n} := f_c^{-1}(z_n)$ und $z_{2n+1} := -f_c^{-1}(z_n)$ $\quad z_1$ abst. Fixpunkt
- komplexe Quadratwurzel: $z := x + \imath y$, $w := u + \imath v$ Ziel: $z^2 = w$ nach $z$

# Darstellung des Randes

- $c \in \mathbb{C}$ und maximale Anzahl an Randpunkten $\hat{n}$ gegeben.
- abstoßenden Fixpunkt berechnen: $z = f_c(z)$
  $\Rightarrow\ z^2 - z + c = 0\ \Rightarrow\ z_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$
- abstoßender Fixpunkt $\in \mathcal{J}(f_c)\ \Rightarrow$ über Generierungslemma $\hat{n}$ Punkte berechnen: $f_c{}^{-1}(z) = \sqrt{z-c}$
  $\Rightarrow\ z_{2n} := f_c{}^{-1}(z_n)$ und $z_{2n+1} := -f_c{}^{-1}(z_n)$ $\quad z_1$ abst. Fixpunkt
- komplexe Quadratwurzel: $z := x + \imath y$, $w := u + \imath v$ Ziel: $z^2 = w$ nach $z$
  $\Rightarrow\ x^2 - y^2 + \imath 2xy = u + \imath v\ \Rightarrow\ u = x^2 - y^2$ und $v = 2xy$

# Darstellung des Randes

- $c \in \mathbb{C}$ und maximale Anzahl an Randpunkten $\hat{n}$ gegeben.
- abstoßenden Fixpunkt berechnen: $z = f_c(z)$

  $\Rightarrow \ z^2 - z + c = 0 \ \Rightarrow \ z_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$
- abstoßender Fixpunkt $\in \mathcal{J}(f_c) \ \Rightarrow$ über Generierungslemma $\hat{n}$ Punkte berechnen: $f_c{}^{-1}(z) = \sqrt{z-c}$

  $\Rightarrow \ z_{2n} := f_c{}^{-1}(z_n)$ und $z_{2n+1} := -f_c{}^{-1}(z_n) \quad z_1$ abst. Fixpunkt
- komplexe Quadratwurzel: $z := x + \imath y$, $w := u + \imath v$ Ziel: $z^2 = w$ nach $z$

  $\Rightarrow \ x^2 - y^2 + \imath 2xy = u + \imath v \ \Rightarrow \ u = x^2 - y^2$ und $v = 2xy$

  $\Rightarrow \ x = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{u + \sqrt{u^2 + v^2}}$ und $y = \dfrac{v}{2x}$
- Randpunkte bspw. schwarz auf weißer Fläche darstellen

# Darstellung der Mandelbrot-Menge

- maximale Anzahl Iterationen $\hat{k}$ gegeben

# Darstellung der Mandelbrot-Menge

- maximale Anzahl Iterationen $\hat{k}$ gegeben
- Bildfläche besteht aus Pixeln, über die ein geeigneter Ausschnitt der komplexen Zahlenebene gelegt wird.

# Darstellung der Mandelbrot-Menge

- maximale Anzahl Iterationen $\hat{k}$ gegeben
- Bildfläche besteht aus Pixeln, über die ein geeigneter Ausschnitt der komplexen Zahlenebene gelegt wird.
- Bildgenerierung - Für jeden Pixel der Bildfläche:
  1. Komplexe Darstellung berechnen $=: c$

# Darstellung der Mandelbrot-Menge

- maximale Anzahl Iterationen $\hat{k}$ gegeben
- Bildfläche besteht aus Pixeln, über die ein geeigneter Ausschnitt der komplexen Zahlenebene gelegt wird.
- Bildgenerierung - Für jeden Pixel der Bildfläche:
  1. Komplexe Darstellung berechnen $=: c$
  2. Fundamentaler Satz der Mandelbrot-Menge: $f_c{}^k(0) \rightarrow \infty \;\Rightarrow\; c \notin \mathcal{M}$

# Darstellung der Mandelbrot-Menge

- maximale Anzahl Iterationen $\hat{k}$ gegeben
- Bildfläche besteht aus Pixeln, über die ein geeigneter Ausschnitt der komplexen Zahlenebene gelegt wird.
- Bildgenerierung - Für jeden Pixel der Bildfläche:
  1. Komplexe Darstellung berechnen $=: c$
  2. Fundamentaler Satz der Mandelbrot-Menge: $f_c{}^k(0) \to \infty \;\Rightarrow\; c \notin \mathcal{M}$
  3. Iteration von $f_c{}^k(0)$ berechnen

# Darstellung der Mandelbrot-Menge

- maximale Anzahl Iterationen $\hat{k}$ gegeben
- Bildfläche besteht aus Pixeln, über die ein geeigneter Ausschnitt der komplexen Zahlenebene gelegt wird.
- Bildgenerierung - Für jeden Pixel der Bildfläche:
  1. Komplexe Darstellung berechnen $=: c$
  2. Fundamentaler Satz der Mandelbrot-Menge: $f_c{}^k(0) \to \infty \ \Rightarrow \ c \notin \mathcal{M}$
  3. Iteration von $f_c{}^k(0)$ berechnen
  4. Per Divergenzlemma entscheiden, ob Folge für $c$ divergent ist.

# Darstellung der Mandelbrot-Menge

- maximale Anzahl Iterationen $\hat{k}$ gegeben
- Bildfläche besteht aus Pixeln, über die ein geeigneter Ausschnitt der komplexen Zahlenebene gelegt wird.
- Bildgenerierung - Für jeden Pixel der Bildfläche:
  1. Komplexe Darstellung berechnen $=: c$
  2. Fundamentaler Satz der Mandelbrot-Menge: $f_c{}^k(0) \to \infty \;\Rightarrow\; c \notin \mathcal{M}$
  3. Iteration von $f_c{}^k(0)$ berechnen
  4. Per Divergenzlemma entscheiden, ob Folge für $c$ divergent ist.
  5. Pixel abhängig von der Anzahl der Iterationen bis zur Feststellung der Divergenz einfärben

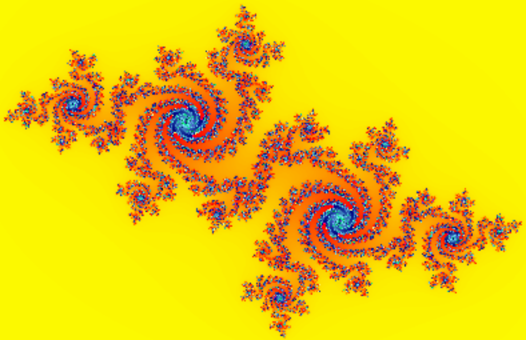
# Darstellung der Mandelbrot-Menge

- maximale Anzahl Iterationen $\hat{k}$ gegeben
- Bildfläche besteht aus Pixeln, über die ein geeigneter Ausschnitt der komplexen Zahlenebene gelegt wird.
- Bildgenerierung - Für jeden Pixel der Bildfläche:
  1. Komplexe Darstellung berechnen $=: c$
  2. Fundamentaler Satz der Mandelbrot-Menge:
     $f_c{}^k(0) \to \infty \;\Rightarrow\; c \notin \mathcal{M}$
  3. Iteration von $f_c{}^k(0)$ berechnen
  4. Per Divergenzlemma entscheiden, ob Folge für $c$ divergent ist.
  5. Pixel abhängig von der Anzahl der Iterationen bis zur Feststellung der Divergenz einfärben
  6. Falls $k = \hat{k}$, dann $c \in \mathcal{M}$). $\Rightarrow$ Pixel Schwarz färben.

# Darstellung der Mandelbrot-Menge

- maximale Anzahl Iterationen $\hat{k}$ gegeben
- Bildfläche besteht aus Pixeln, über die ein geeigneter Ausschnitt der komplexen Zahlenebene gelegt wird.
- Bildgenerierung - Für jeden Pixel der Bildfläche:
  1. Komplexe Darstellung berechnen $=: c$
  2. Fundamentaler Satz der Mandelbrot-Menge: $f_c{}^k(0) \to \infty \;\Rightarrow\; c \notin \mathcal{M}$
  3. Iteration von $f_c{}^k(0)$ berechnen
  4. Per Divergenzlemma entscheiden, ob Folge für $c$ divergent ist.
  5. Pixel abhängig von der Anzahl der Iterationen bis zur Feststellung der Divergenz einfärben
  6. Falls $k = \hat{k}$, dann $c \in \mathcal{M}$). $\Rightarrow$ Pixel Schwarz färben.
- Anwendung des Divergenzlemma: Test $f_c{}^k(z) \geq \max\{|z|, 2\}$

# Demonstration des Beispielprogramms



Demoprogramm starten

# Literatur

- K.Falconer: Fractal Geometry - Mathematical foundations and applications, 2nd Edition, Wiley, 2003
- H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe: Chaos and fractals. New frontiers of science, 2nd Edition, Springer, 2004