Prof. V. Schmidt / F.Voss

WS 2006/07
19.10.2006

Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung - Blatt 1

(Abgabe: Donnerstag, 26.10.2006, vor den Übungen)

Bitte Übungsblätter zu zweit abgeben. Es ist eine Anmeldung bei SLC notwendig.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Ein PC-Händler bekommt eine Lieferung von 2 PC's und 3 Monitoren. Mit P_i, $i = 1, 2$ bzw. M_j, $j = 1, 2, 3$ sei das Ereignis bezeichnet, dass der i-te PC bzw. der j-te Monitor defekt ist. Beschreiben Sie mit Hilfe dieser Ereignisse und passenden Mengenoperationen die folgenden Ereignisse :

(a) Alle gelieferten PC's sind defekt.

(b) Alle gelieferten Geräte sind funktionsfähig.

(c) Mindestens ein Monitor ist defekt.

(d) Monitor 2 ist defekt, aber mindestens ein anderer Monitor funktioniert.

(e) Aus den vorhandenen Geräten läßt sich genau ein Komplettsystem (PC+Monitor) zusammenstellen.

(f) Der erste PC und der dritte Monitor ergeben ein funktionsfähiges Komplettsystem. Zusätzlich kann jedoch kein weiteres Komplettsystem zusammengestellt werden.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $\mathcal{E}$ ein System von Teilmengen eines Grundraumes Ω. Die von $\mathcal{E}$ *erzeugte* σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ ist definiert über $\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \supseteq \mathcal{E}, \mathcal{F} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra über } \Omega\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra ist.

(b) Gegeben sei der Grundraum $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $\mathcal{E} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}\}$. Geben Sie die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra an.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Situationen geeignete Grundräume an:

(a) Zwei identische Würfel werden dreimal jeweils gleichzeitig geworfen.

(b) Aus einer Urne, in der sich n von 1 bis n durchnummerierte Kugeln befinden, werden k Kugeln mit einem Griff gezogen.

(c) Aus einer Gruppe von 8 Mathematikern, 4 Informatikern und 3 Biologen wird ein Viererkomitee zufällig gebildet.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beweisen Sie die de Morganschen Regeln: Für zwei Mengen $A, B \subset \Omega$ gilt:

(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,

(b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{F}$. Die **symmetrische Differenz** $A \triangle B$ ist durch $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ erklärt. Zeigen Sie:

(a) $P(A \triangle B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)\,,$

(b) $P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(A^c)P(B) - P(A^c \cap B)\,.$