Prof. V. Schmidt / F.Voss WS 2006/07

21.12.2006

Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung - Blatt 10

(Abgabe: Donnerstag, 11.1.2007, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 Punkte)

Es sei X eine Zufallsvariable. Berechnen Sie das 2. Moment und die Varianz von X, falls

(a) X Poisson-verteilt ist mit Parameter $\lambda > 0$.

(b) X Exponential-verteilt ist mit Parameter $\lambda > 0$.

(c) $F_X(x) = \left(1 - 0.8e^{1-x}\right) 1\!\!1_{\{x \geq 1\}}, \quad x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei X Exponential-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $X_1 = e^{-X}$, $X_2 = 2X$ und $X_3 = \max\{X, 1/3\}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Die absolutstetige Zufallsvariable X beschreibe die zufällige Dauer eines Telefongespräches. Die Dichte von X sei gegeben durch

$$f_X(x) = \frac{1}{16} x e^{-\frac{1}{4}x} 1\!\!1_{\{x \geq 0\}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Eine Telefongesellschaft berechnet für Gespräche bis zu 5 Minuten einen Festpreis von EUR 0.20, danach steigt der Preis linear zu der Geprächsdauer mit einem Faktor von 0.03 EUR/min. Die Zufallsvariable $K = k(X)$ gebe die Kosten eines Telefonanrufes der Länge X an. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von K.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine beliebige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}\,(X^2) < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\min_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\,((X-a)^2) = \mathbb{E}\,((X - \mathbb{E}\,X)^2)\,.$$

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Es sei $X_1, X_2, ...$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen und sei N eine hiervon unabhängige diskrete Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass dann

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = EN\,EX_1$$

gilt.

Aufgabe 6* (10 Extrapunkte)

Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und sei F^{-1} die zugehörige Quantilfunktion. Zeigen Sie:

(a) $F(F^{-1}(p)) \geq p, \quad 0 < p < 1$,

(b) $F(F^{-1}(p)) = p \Leftrightarrow p \in F(\mathbb{R})$, wobei $F(\mathbb{R})$ den Bildbereich der Verteilugsfunktion F bezeichnet,

(c) F^{-1} ist linksseitig stetig.

(d) Sei F stetig und streng monoton wachsend, und sei U eine auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $F^{-1}(U)$ und $F(X)$.

(e) Erzeugen Sie mit Hilfe von R (unter http://www.r-project.org/ frei verfügbar) oder S-Plus und Teilaufgabe (d) (siehe auch Blatt 8, Nr. 1 c)) 1000 Exp(1)-verteilte unabhängige Zufallszahlen. Plotten Sie ein Histogramm mit diesen Werten.
(Hinweis: R enthält die Funktion **runif(**n**)** zur Erzeugung von $[0,1]$-gleichverteilten Pseudo-Zufallszahlen. Die Funktion **hist(**x**)** erzeugt ein Histogramm von den Daten des Vektors x.)