Prof. V. Schmidt / F.Voss WS 2006/07
11.1.2007

Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung - Blatt 11

(Abgabe: Donnerstag, 18.1.2007, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien X und Y unabhängig und gleichverteilt auf $[0,1]$. Berechnen Sie die Kovarianzen $Cov(X,Y)$ und $Cov(U,V)$ von $U = \min\{X,Y\}$ und $V = \max\{X,Y\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Es seien X, Y, Z quadratisch integrierbare Zufallsvariablen und $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $Cov(aX + bY, Z) = aCov(X,Z) + bCov(Y,Z)$ und $Cov(Z, aX + bY) = aCov(Z,X) + bCov(Z,Y)$.

(b) Es sei $CovX$ die Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $X = (X_1, \ldots, X_n)$ mit $\mathbb{E}(X_i^2) < \infty$. Zeigen Sie, dass
$$Cov(a^\top X + c, b^\top X + d) = a^\top CovX\, b$$
wobei $a, b \in \mathbb{R}^n, c, d \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen mit endlicher Varianz einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bilden.

(b) Seien X, Y Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0, Varianz 1 und Kovarianz c. Zeigen Sie, dass folgende Ungleichung gilt :
$$\mathbb{E}(\max\{X^2, Y^2\}) \leq 1 + (1 - c^2)^{\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Ein Anleger verfügt am Beginn einer Periode über 100 000 Euro. Er investiert 60 000 in eine Anlagemöglichkeit, die eine zufallsabhängige Rendite X mit $\mathbb{E}X = 0.08$ und $\mathrm{Var}X = 0.0004$ besitzt. Die restlichen 40 000 legt er zur zufallsabhängigen Rendite Y mit $\mathbb{E}Y = 0.06$ und $\mathrm{Var}Y = 0.0001$ an. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Vermögens Z am Ende der Periode, wenn X und Y

(a) unabhängige Zufallsvariablen sind,

(b) den Korrelationskoeffizienten -0.3 besitzen.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Seien X und Y quadratisch integrierbare Zufallsvariablen.

(a) Zeigen Sie : Wenn X und Y identisch verteilt sind, dann sind $U = X - Y$ und $V = X + Y$ unkorreliert.

(b) Seien X und Y unabhängig und $Bin(1,p)$-verteilt mit $0 < p < 1$. Sind dann U und V unabhängig?

Aufgabe 6 (5 Punkte)
Sei $X = (X_1, X_2)$ normalverteilt mit Parametern $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ und ρ. Zeigen Sie, dass für den Erwartungswertsvektor $\mathbb{E}X = (\mu_1, \mu_2)$ gilt und die Kovarianzmatrix durch $Cov(X_i, X_j) = \sigma_i \sigma_j \rho$ gegeben ist.