Prof. V. Schmidt / F.Voss

WS 2006/07
1.2.2007

Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung - Blatt 14

(Abgabe: Donnerstag, 8.2.2007, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Sei $\{X_n, n \geq 2\}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$P(X_n = -n) = P(X_n = n) = \frac{1}{2n\log(n)}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log(n)}.$$

(a) Genügt die Folge dem schwachen Gesetz der großen Zahlen?

(b) Genügt die Folge dem starken Gesetz der großen Zahlen?

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Seien $X_1, X_2, \dots : \Omega \longrightarrow (0,\infty)$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_1 = 0$ und $VarX_1 = \sigma^2 < \infty$. Für $n \geq 2$, sei $Y_n = 1/n \cdot (X_1 + \cdots + X_n)$ und $Z_n = 1/(n-1) \sum\limits_{k=1}^{n} (X_k - Y_n)^2$. Zeigen Sie, dass

(a) $\mathbb{E}Z_n = \sigma^2$.

(b) $Z_n \xrightarrow{\text{f.s.}} \sigma^2$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Seien $X_1, X_2, \dots : \Omega \longrightarrow (0,\infty)$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mu = \mathbb{E}X_1 < \infty$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ und $N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$. Zeigen Sie, dass

(a) $N(t) \xrightarrow{\text{f.s.}} \infty$ für $t \longrightarrow \infty$ und $\mathbb{P}(N(t) < \infty) = 1$ für jedes $t > 0$.

(b) $S_{N(t)}/N(t) \xrightarrow{\text{f.s.}} \mu$.

(c) $t/N(t) \xrightarrow{\text{f.s.}} \mu$ und $N(t)/t \xrightarrow{\text{f.s.}} 1/\mu$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)
Es sei $X_n, n \in \mathbb{N}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen. Weise nach, dass

$$\frac{1}{\sqrt{n}\log(n)} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\text{P}} 0,$$

falls $\mathbb{E}X_1 = 0$ und $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$ gilt.

Aufgabe 5 (5 Zusatzpunkte)
Benutzen Sie das starke Gesetz der grossen Zahlen um eine Näherung für die Zahl π zu bestimmen. Benutzen Sie hierfür R oder ein anderes Programm. Bestimmen Sie eine Näherung für 1000, 10000 bzw. 100000 simulierte Werten. Geben Sie einen Ausdruck Ihres Programms ab.