Prof. V. Schmidt / F.Voss

WS 2006/07
16.11.2006

Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung - Blatt 5

(Abgabe: Donnerstag, 23.11.2006, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (7 Punkte)
Zeigen Sie, dass eine Zufallsvariable X genau dann geometrisch verteilt ist, falls X positiv und ganzzahlig ist und die folgende Eigenschaft erfüllt:

$$P(X = n + k \mid X > n) = P(X = k) \quad \text{für alle } n, k \in \mathbb{N}.$$

Beantworten Sie zudem die folgende Frage: Wenn beim wiederholten Wurf einer fairen Münze nach zwanzig Versuchen "Kopf" noch nicht erschienen ist, ist dann die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Versuch "Kopf" zu erhalten, größer als 1/2?

Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 Punkte)
Die Zufallsvariable X sei Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass für die Einzelwahrscheinlichkeiten $p_k = P(X = k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, folgende Rekursionsgleichung gilt: $p_k = \lambda\, k^{-1}\, p_{k-1}$ für alle $k > 0$.

(b) Zeigen Sie, dass es ein $k_0 \in \mathbb{R}$ derart gibt, dass $p_k < p_{k+1}$ für alle $k < k_0$ und $p_k \geq p_{k+1}$ für alle $k \geq k_0$.

(c) Bestimmen Sie $k^* \in \mathbb{N}_0$ derart, dass $p_{k^*} = \max\limits_k p_k$ und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X.

Aufgabe 3 (2 + 2 Punkte)
Eine Ölgesellschaft weiß aus Erfahrung, dass die Wahrscheinlichkeit für eine erfolgreiche Probebohrung 0.01 ist. Berechnen Sie die

(a) exakte

(b) approximative

Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den nächsten 300 Probebohrungen höchstens 4 erfolgreich sein werden, wenn die Bohrungen als unabhängig betrachtet werden können.
(Hinweis: Verwenden Sie das Gesetz der seltenen Ereignisse in Teil b).

Aufgabe 4 (4+4 Punkte)

(a) Ein Würfel wird viermal geworfen. Die Zufallsvariable X_1 gebe an, wie oft die Augenzahl echt kleiner als 3 ist. Geben Sie eine geeignete Darstellung von $X_1 : \Omega \to C$ mit einem entsprechenden Grundraum Ω und Wertebereich C an. Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X_1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X_1 > 2)$.

(b) Sei $p \in [0, 1]$. Die Zufallsvariable X_2 habe die Verteilungsfunktion

$$F_{X_2}(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1 - p, & -1 \leq x < 0, \\ 1 - p + \frac{1}{2}xp, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F_{X_2} und berechnen Sie $P(-1 < X_2 \leq 1)$, $P(X_2 = 0)$ und $P(X_2 = -1)$.