Prof. V. Schmidt / F.Voss

WS 2006/07
23.11.2006

Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung - Blatt 6

(Abgabe: Donnerstag, 30.11.2006, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (2 + 2 + 3 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ eine beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum, und die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} c\, e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x}) & ,\text{falls } x > 0\,, \\ 0 & ,\text{falls } x \le 0\,, \end{cases}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ und $\lambda > 0$.

(a) Für welches $c \in \mathbb{R}$ ist f eine Dichte?

(b) Bestimmen Sie die zu f gehörige Verteilungsfunktion.

(c) Sei X eine absolutstetige Zufallsvariable mit Dichte f. Berechnen Sie $P(1 \le X \le 4)$ und skizzieren Sie f für $\lambda = 1$. Fügen Sie in der Skizze eine anschauliche Interpretation von $P(1 \le X \le 4)$ und die Verteilungsfunktion hinzu.

Aufgabe 2 (3 + 3 + 2 Punkte)

(a) Drücken Sie die Dichte der Zufallsvariablen $Y = aX$ für $a \neq 0$ mit Hilfe der Dichte der absolutstetigen Zufallsvariablen X aus.

(b) Zeigen Sie, dass die absolutstetigen Zufallsvariablen X und $-X$ genau dann dieselbe Verteilung besitzen, wenn $f_X(x) = f_X(-x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(c) Bezeichne Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Zeigen Sie, dass $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Ein Meinungsforschungsinstitut will den voraussichtlichen Stimmanteil p der Partei A ermitteln, wenn am Sonntag Bundestagswahl wäre. Dazu werden n Wahlberechtigte befragt und jeweils vermerkt, ob sie für die Partei A stimmen werden oder nicht. Wieviele Wahlberechtigte müssen mindestens befragt werden, um den Stimmanteil der Partei mit einer Sicherheit von mindestens 95% auf eine absolute Genauigkeit von ±2% vorhersagen zu können? (Hinweis : Benutze die Tabelle auf der Rückseite)

Aufgabe 4 (4 + 2 Punkte)
Sei X ein Zufallsvektor. Bestimmen Sie die

(a) Dichten von X_1 und X_2, falls $X = (X_1, X_2)$ absolutstetig ist mit gemeinsamer Dichte

$$f(x_1, x_2) = x_2 e^{-x_2(x_1+1)}, \qquad x_1 > 0, x_2 > 0$$

(b) Zähldichten von $X_i, i = 1, \cdots, n$, falls $X = (X_1, \ldots, X_n)$ diskret ist mit Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = (k_1, \ldots, k_n)) = \frac{m!}{k_1! \cdots k_n!}\, p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n} \;\forall\; k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{mit} \quad k_1 + \cdots + k_n = m$$

wobei $0 \le p_i \le 1 \;\forall\; i = 1, \ldots, n$, $p_1 + \cdots + p_n = 1$ und $m \in \mathbb{N}$ fest gewählt.

Tabelle der Verteilungsfunktion $\Phi(x) = P(X \leq x)$, $X \sim N(0,1)$ der Standardnormalverteilung

Beispiel : $\Phi(1.96) = 0.975002$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511967	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092
0,3	0,617911	0,621719	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705402	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802338	0,805106	0,807850	0,810570	0,813267
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,878999	0,881000	0,882977
1,2	0,884930	0,886860	0,888767	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475
1,3	0,903199	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914656	0,916207	0,917736
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888
1,5	0,933193	0,934478	0,935744	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959071	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273
1,8	0,964070	0,964852	0,965621	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621
1,9	0,971284	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201
2,6	0,995339	0,995473	0,995603	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605
3,0	0,998650	0,998694	0,998736	0,998777	0,998817	0,998856	0,998893	0,998930	0,998965	0,998999