Prof. V. Schmidt / F.Voss WS 2006/07
30.11.2006

Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung - Blatt 7

(Abgabe: Donnerstag, 7.12.2006, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (4 + 2 + 2 Punkte)
Sei $X = (X_1, X_2)$ ein Zufallsvektor mit gemeinsamer Dichte

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{2}{4e^{-1}-1} x_1 e^{-x_2} & \text{, falls } 0 \le x_1 \le 1\,, 0 < x_2 \le x_1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

bzw. $Y = (Y_1, Y_2)$ mit gemeinsamer Dichte

$$f_2(y_1, y_2) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } 0 \le y_1 \le 1\,, 0 \le y_2 \le 1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

(a) Sind X_1 und X_2 bzw. Y_1 und Y_2 unabhängig?

(b) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion $F_2(y_1, y_2)$ von Y_1 und Y_2.

(c) Bestimmen Sie die bedingte Dichte von X_2 unter der Bedingung $\{X_1 = x_1\}$ und die bedingte Verteilungsfunktion $F_{X_2|X_1=x_1}(x_2)$ für $0 < x_1 \le 1$.

Aufgabe 2 (3 + 3 Punkte)
Seien $X_1, \ldots, X_m$ unabhängige Zufallsvariablen und sei $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Zeigen Sie, dass

(a) $S_n \sim \text{Bin}(m_1 + \cdots + m_n, p)$, falls $X_i \sim \text{Bin}(m_i, p)$, $i = 1, \ldots, n$.

(b) $S_n \sim \text{Poi}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$, falls $X_i \sim \text{Poi}(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Eine Münze mit wird N mal geworfen, wobei $N \sim \text{Poi}(\lambda)$. Die Wahrscheinlichkeit für Kopf sei p und für Zahl $q = 1-p$. Seien X bzw. Y die Anzahl von Versuchen mit Kopf bzw. Zahl. Sind X und Y unabhängig?

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Angenommen, Sie stehen in einer Warteschlange vor einem Schalter. Die Bedienzeiten in Minuten am Schalter seien unabhängig und $\text{Exp}(\lambda)$-verteilt für ein $\lambda > 0$.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Kunde vor Ihnen mindestens doppelt so viel Zeit am Schalter verbringt wie Sie?

(b) Wenn der Kunde vor Ihnen 5 Minuten am Schalter benötigte, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mehr als 5 Minuten am Schalter stehen?

Aufgabe 5 (2 + 1 + 3 Punkte)
Es sei $X = (X_1, ..., X_n)$ ein beliebiger Zufallsvektor.

(a) Zeigen Sie, dass jeder Teilvektor $(X_{i_1}, ..., X_{i_m})$ mit $\{i_1, ..., i_m\} \subseteq \{1, ..., n\}$ und $2 \le m \le n$ aus unabhängigen Komponenten besteht, falls dies für den Gesamtverktor X gilt.

(b) Widerlegen Sie, dass aus der paarweisen Unabhängigkeit der Komponenten von X die vollständige Unabhängigkeit aller Komponenten von X folgt (Wähle z.B. $n = 3$).

(c) Seien X und Y unabhängig und identisch verteilt mit stetiger Dichte f und Verteilungsfunktion F. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen F_U bzw. F_V und eine Dichte f_U bzw. f_V von $U = \max\{X, Y\}$ bzw. $V = \min\{X, Y\}$.