Prof. V. Schmidt / F.Voss

WS 2006/07
14.12.2006

Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung - Blatt 9

(Abgabe: Donnerstag, 21.12.2006, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 Punkte)
Es sei X eine Zufallsvariable. Berechnen Sie den Erwartungswert von X, falls

(a) $P(X = k) = -\dfrac{(1-p)^k}{k \ln p}, \quad k \in \mathbb{N}, p \in (0,1);$

(b) $P(X > t) = \exp\{-\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{2}}\}, \quad t > 0, T > 0$

(c) $F_X(x) = \left(1 - 0.8e^{1-x}\right) \mathbb{I}_{\{x \geq 1\}}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Bei einem Glücksspiel kann ein Spieler Geld setzen. Es wird eine faire Münze geworfen und bei Kopf bekommt der Spieler den doppelten Einsatz zurück. Das Glücksspiel wird unabhängig wiederholt. Der Spieler fängt mit 1 Euro Einsatz an. Wenn er ein Spiel gewinnt, dann hört er auf und nimmt den Gewinn mit. Wenn er verliert, dann verdoppelt er seinen Einsatz und spielt weiter. Dies wiederholt er bis zu einem Gewinn. Sei X der Gewinn nach Abzug aller Einsätze und Y die Summe aller Einsätze, wenn er aufhört zu spielen. Bestimmen Sie $\mathbb{E}X$ und $\mathbb{E}Y$.

Aufgabe 3 (2 + 3 Punkte)
Eine Pumpe sei ununterbrochen in Betrieb, bis sie ausfalle. Die Zufallsvariable X, die die zufällige Dauer der Funktionsfähigkeit der Pumpe beschreibt, sei absolutstetig mit Dichte $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, wobei $(\lambda > 0)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} & , \text{ falls } x > 0\,, \\ 0 & , \text{ falls } x \leq 0\,. \end{cases}$$

Weiter sei bekannt, dass Pumpen dieser Bauart im Mittel 100 Stunden laufen, bis sie ausfallen.

(a) Wie ist der Parameter λ zu wählen, damit der Erwartungswert von X gleich der mittleren Laufzeit dieser Pumpen ist?

(b) Aus Sicherheitsgründen tauscht man eine Pumpe, sobald sie 100 Stunden lang im Einsatz war, gegen eine neue gleichartige aus. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable Y, welche die Einsatzzeit einer Pumpe beschreibt und berechnen Sie ihren Erwartungswert. (Die Einsatzzeit einer Pumpe ist die Zeit, die vergeht, bis die Pumpe entweder ausfällt oder aber ausgewechselt wird.)

Aufgabe 4 (3 Punkte)
Beweisen Sie, dass der Erwartungswert $\mathbb{E}X$ einer Zufallsvariablen X, die mit Wahrscheinlichkeit 1 nur Werte in einem Intervall (a, b) annimmt, auch im Intervall (a, b) liegt.

Aufgabe 5 (3 Punkte)
Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$ und Verteilungsfunktion F. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}X^r = \int_0^\infty r x^{r-1}(1 - F(x))dx$$

gilt, falls $r \geq 0$ und dieser Erwartungswert endlich ist.

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) \leq \mathbb{E}\, X \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)\,.$$